



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Discente: João Paulo Pereira Leal
Orientador: Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

Campos Intermediadores na Leitura da Quebra
Espontânea de Simetria: Implicações no Modelo Padrão
e Além

UNIFAL
Alfenas - MG
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Discente: João Paulo Pereira Leal
Orientador: Prof. Dr. ANDERSON ANTUNES NOGUEIRA

Campos Intermediadores na Leitura da Quebra Espontânea de Simetria: Implicações no Modelo Padrão e Além

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física pela Universidade Federal de Alfenas.

Área de concentração: Partículas e Campos.

Orientador: Professor Dr. Anderson Antunes Nogueira

UNIFAL
Alfenas - MG
2024

Agradecimentos

Gostaria de aproveitar este momento para expressar minha gratidão a Deus e à minha família, especialmente à minha mãe, Cláudia, e aos meus avós, Paulo e Luzia, que me apoiaram nas principais decisões, se sacrificaram e me aconselharam diariamente para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Aos meus professores do curso de Física, cujo profissionalismo e dedicação foram essenciais para minha evolução no campo, um agradecimento especial ao meu orientador, Anderson, que me apresentou discussões sobre os problemas e cuja orientação foi crucial para a realização deste trabalho.

A todos, meu muito obrigado. Este trabalho é também fruto da dedicação de vocês.

*Os limites da minha linguagem significam
os limites do meu mundo.*

— **Ludwig J.J. Wittgenstein,**
Tractatus Logico-Philosophicus

Campos Intermediadores na Leitura da Quebra Espontânea de Simetria

(Implicações no Modelo Padrão e Além)

J. P. P. Leal^{1*}

¹ *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840, Brasil*

Julho, 2024

Resumo

Temos como proposta nesse trabalho de conclusão de curso advindo de um projeto de pesquisa (iniciação científica) investigar mecanismos que geram massa para campos vetoriais que intermediam as interações, observando nas entrelinhas o papel fundamental da simetria de calibre nesse estudo. Primeiramente iremos contemplar como a massa afeta a eletrodinâmica de Maxwell tendo em mente os modelos de Proca e Stüeckelberg. Ganhando familiaridade com campos vetoriais massivos, estudaremos classicamente o teorema de Goldstone, onde campos vetoriais comem os bósons de Goldstone adquirindo massa devido à quebra espontânea de simetria, não somente no modelo de Higgs U(1) mas também no modelo SU(2). Em seguida, aplicaremos toda experiência anterior para deduzir a massa dos intermediadores da interação eletrofraca não apenas pelo modelo de Leite Lopez mas também pelo modelo de léptons de Steven Weinberg. Dando continuidade, adicionaremos no modelo de léptons o conceito de quarks envolvendo sabores e cores e, dessa forma, completando o que conhecemos como Modelo Padrão das partículas elementares. Por fim, apresentaremos os campos vetoriais da teoria eletrofraca na leitura de Stüeckelberg, investigando uma física além do Modelo Padrão.

Palavras chaves: Teoria de Calibre; Quebra Espontânea de Simetria; Teoria Eletrofraca; Modelo Padrão; Forças da Natureza

* joaopaulo.leal@sou.unifal-mg.edu.br

Intermediate fields in the understanding of spontaneous symmetry breaking

(Implications within and beyond the Standard Model)

J. P. P. Leal^{1*}

¹ *Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Alfenas 37133-840, Brasil*

July, 2024

Abstract

In this final project, which stems from a research project (scientific initiation), we propose to investigate mechanisms that generate mass for vector fields that mediate interactions, observing the fundamental role of gauge symmetry in this study. First, we will contemplate how mass affects Maxwell's electrodynamics, keeping in mind the Proca and Stueckelberg models. Gaining familiarity with massive vector fields, we will study the Goldstone theorem classically, where vector fields "eat" the Goldstone bosons, acquiring mass due to spontaneous symmetry breaking, not only in the U(1) Higgs model but also in the SU(2) model. Next, we will apply all previous experience to deduce the mass of the mediators of the electroweak interaction, not only using the Leite Lopes model but also Steven Weinberg's model of leptons. Continuing, we will add the concept of quarks involving flavors and colors to the lepton model, thus completing what we know as the Standard Model of elementary particles. Finally, we will present the vector fields of the electroweak theory in the reading of Stueckelberg, investigating physics beyond the Standard Model.

Keywords: Gauge Theory; Spontaneous Symmetry breaking; Electroweak theory; Standard Model; Forces of Nature

* joaopaulo.leal@sou.unifal-mg.edu.br

Conteúdo

1	Conceitos Introdutórios e Indagações	1
2	Eletrodinâmica de Proca-Stüeckelberg, massa para campos vetoriais e a simetria de calibre	2
3	Teorias de calibre com quebra espontânea de simetria e teorema de Goldstone	6
3.1	Teorias de calibre com simetria global e local	7
3.2	Quebra Espontânea de Simetria Global $U(1)$ - Nambu-Goldstone bosons .	12
3.3	Quebra Espontânea de Simetria Local $U(1)$ - Mecanismo de Higgs	14
3.4	Caso geral	17
3.5	Um caso não-abeliano de quebra espontânea de simetria - $SU(2)$	20
4	Teoria da interação eletrofraca e os campos vetoriais mensageiros da interação	24
4.1	O modelo de Fermi e as partículas mensageiras de Leite Lopez	25
4.2	Incluindo a partícula mensageira neutra e o fóton via simetria $SU(2) \otimes U(1)$ de Bludman-Glashow	27
4.3	O modelo de Leptons de Salam-Weinberg	30
4.4	A hipótese dos quarks com sabores e cores e a construção do Modelo Padrão	41
4.4.1	A questão dos sabores, isospin e $SU(2)$ global	41
4.4.2	A questão das cores e a simetria de calibre $SU(3)$ local	47
4.5	Campos intermediadores da interação eletrofraca na abordagem de Stüeckelberg	52
5	Considerações finais e perspectivas	56
A	Álgebra de $SU(2)$	57
B	Produto tensorial e soma direta de representações	59

Lista de Figuras

1	Esquematização do Espaço das Transformações	8
2	Esquematização do Espaço das Transformações estendido	9
3	Potencial $V(\varphi_1, \varphi_2), \mu^2 > 0$	13
4	Um mergulho nas escalas de energia e arquitetura da realidade tendo em mente um decaimento β^-	24
5	Decaimento Beta descrito pelo bóson de Leite Lopez	27
6	Vértices propostos implícitamente no trabalho de Leite Lopez	29
7	Vértice de interação entre as partículas do modelo investigado e o fóton . .	30
8	Vértices de interação do bóson vetorial W^- com léptons e quarks	36
9	Decaimento beta negativo tendo em vista o modelo de S. Weinberg	37
10	Vértices de acoplamento entre o Z_0 e a matéria leptônica e quarkônica . .	38
11	Vértices de acoplamento entre as partículas no modelo eletrofraco de S. Weinberg	40
12	Decaimento do Higgs em 4 léptons e 2 fótons	40

13	Troca de pions por prótons em termos dos quarks e observe que o quark se comporta como operador de criação com o antiquark sendo o operador de destruição ($u\bar{u})u = u$)	42
14	Prótons viram nêutrons por troca de pions em termos dos quarks ($(u\bar{d})d = u$)	43
15	Produção da partícula delta mais carregada no espalhamento de pions por prótons	43
16	Produção da partícula delta neutro no espalhamento do pion negativo por prótons	44
17	Vértices associados a produção de pions negativos via troca de prótons por neutrons e produção de kaons positivos via troca de neutrons por partícula sigma	46
18	Captura de um pion negativo por um próton e decaimento do nêutron em sigma menos e kaons	46
19	Vértice de interação entre quarks de cor e gluons	49
20	Acoplamentos triplos e quárticos entre os gluons	49
21	No decaimento do pion neutro em 2 fótons temos 3 cores contribuindo no triângulo de quarks (interação forte)	51
22	No decaimento do bóson vetorial carregado aumentamos os canais de decaimento do mesmo, tendo em vista a possibilidade de cores (interação fraca)	51
23	Troca de pions neutros por prótons em uma dinâmica de sabor e cor	52
24	Um próton vira um neutro e vice versa via troca de um pion carregado positivamente em uma dinâmica de sabor e cor	52

1 Conceitos Introdutórios e Indagações

A questão da geração de massa para partículas que intermediam as interações ou forças da natureza (campos vetoriais, por exemplo), tendo em vista suas atuações de curto ou longo alcance, desempenham um papel crucial no estudo da interação entre matéria e radiação e nesse contexto a simetria de calibre juntamente com mecanismos de quebra de simetria protagonizam esse estudo. [1–5]

Observando a fenomenologia de Heisenberg-Tamm-Yukawa na descrição da interação forte devido a troca de partículas massivas (mésons) por partículas nucleares (prótons e neutrons), a questão da massa para partículas intermediadoras da interação e a descrição de interações de curto alcance foi amplamente estudada por Proca e Stüeckelberg inicialmente, onde percebemos a possibilidade de campos vetoriais massivos apresentarem a simetria de calibre. Paralelamente O. Klein fez uma proposta inusitada para interação fraca supondo um campo vetorial carregado como intermediador da interação fraca de Fermi. [6–11]

Até o momento presente, a exploração das simetrias internas na física tem sido conduzida pelos teoremas da Emmy Noether, onde a ação é uma quantidade fundamental, e estudamos sua invariância sob a influência de um grupo de simetria. Uma revolução conceitual tem início com os estudos de Glashow sobre simetrias parciais na interação eletrofraca. Este novo paradigma não apenas ganha destaque com as contribuições de Nambu e Goldstone, explorando o potencial proveniente da pesquisa em matéria condensada e supercondutores (representado graficamente como um chapéu mexicano, com vértices associados ao acoplamento de 4 escalares), mas também é enriquecido pelas investigações de Abdus Salam e Steven Weinberg sobre o surgimento de um bóson escalar não massivo. Inspirados no trabalho de Anderson sobre mediadores de interação e simetrias de calibre em matéria condensada, Eglet-Higgs-Kibble e colaboradores empreendem estudos sobre um mecanismo de quebra de simetria em uma teoria de calibre local (seja ela abeliana ou não abeliana). Um resultado crucial é a observação de que o bóson de Nambu-Goldstone desaparece, e os campos de calibre adquirem massa. Podemos então afirmar que os campos de calibre absorvem os escalares de Nambu-Goldstone, adquirindo massa no processo. Com o terreno agora pavimentado, explorando as sutilezas da quebra espontânea de simetria e a geração de massa para campos vetoriais, a unificação da interação fraca com a eletromagnética não tarda a se concretizar na teoria eletrofraca de Salam-Weinberg. Esse desenvolvimento era, de certa forma, esperado, considerando as analogias entre as interações fraca e eletromagnética, mediadas por campos vetoriais, alguns massivos e outros não. [12–35]

Atualmente, a literatura científica é repleta de estudos abordando campos e os sofisticados conceitos relacionados à geração de massa para partículas por meio da quebra de simetria. Essas ferramentas teóricas, centradas nos campos, representam nossa visão

filosófica contemporânea sobre como descrever os blocos fundamentais da realidade física, considerando a intrincada interação entre matéria e radiação. Como evidenciado ao longo desta introdução, a questão da massa das partículas, em suas diversas facetas, continua a ser um tema contemporâneo fascinante, que inspira investigações e questionamentos na vanguarda da pesquisa científica. Vale salientar que em 2013 a natureza disse sim para o bóson de Higgs. [36–48]

Pois bem, o trabalho está organizado da seguinte forma evolutiva (Thomas Kuhn e os paradigmas científicos): Na Sec.[2] iremos explorar os conceitos rudimentares ou primitivos envolvendo massa para partículas e simetria de calibre. Na Sec.[3] exploraremos de maneira completa o conceito envolvendo a quebra espontânea da simetria de calibre e a geração de massa para as partículas, apresentando o teorema de Goldstone e aplicações em alguns protótipos da realidade. Por fim, na Sec.[4] aplicaremos os conceitos anteriores envolvendo geração de massa na construção de modelos mais fidedignos a realidade física, tendo como produto final a física do Modelo Padrão e além do mesmo, tendo em mente a necessidade de concertar as novas anomalias que surgem da teoria. Acreditamos que explorar as propriedades do fóton de Stüeckelberg não apenas no eletromagnetismo, mas também na quebra espontânea de simetria e no contexto unificado da Teoria eletrofraca é um assunto moderno e inspirador, aparentemente não explorado com propósitos de ensino de Física e que merece seu espaço na literatura. Consideramos ao longo do trabalho a seguinte assinatura da métrica de Minkowski $\text{diag}\{\eta^{\mu\nu}\} = (1, -1, -1, -1)$.

2 Eletrodinâmica de Proca-Stüeckelberg, massa para campos vetoriais e a simetria de calibre

Vamos agora construir as ferramentas básicas necessárias para implementar a ideia de massa das partículas e sua relação com a simetria de calibre.

Com o auxílio das equações de Einstein e o princípio da correspondência de Schrödinger

$$p_\mu p^\mu = m^2, \quad p_\mu = (E, \vec{p}) \quad (2.1)$$

sendo os operadores energia e momento, respectivamente, $E = i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$, escrevemos uma equação de onda massiva para o 4-vetor $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ via a equação de autovalores:

$$\begin{aligned} (E^2 + \vec{p}^2)A_\mu &= m^2 A_\mu \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)A_\mu &= m^2 A_\mu \end{aligned} \quad (2.2)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(\square + m^2)A_\mu &= 0, \\ \square &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \text{(D'Alembertiano)}\end{aligned}\tag{2.3}$$

De maneira direta, escrevemos a densidade Lagrangiana de Proca,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= A^\mu(\square + m^2)\eta_{\mu\nu}A^\nu \\ &= \frac{1}{2}(A_\mu\eta^{\mu\nu}\square A_\nu + m^2 A_\mu A^\mu)\end{aligned}\tag{2.4}$$

a partir da qual deduzimos as equações de movimento por meio do princípio variacional da ação mínima de Hamilton $\delta S = 0$, sendo $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Agora, com o intuito de obtermos uma equação de onda homogênea, implementamos o acoplamento entre corrente e campo ($j_\mu A^\mu$) na Lagrangiana. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(A_\mu\eta^{\mu\nu}\square A_\nu + m^2 A_\mu A^\mu) + j_\mu A^\mu \\ j_\mu &= (\rho, \vec{j}) = (j_0, j_i)\end{aligned}\tag{2.5}$$

sendo, j_μ a 4-corrente.

No regime estático, sem variações temporais, podemos estudar o potencial ϕ gerado por uma distribuição de carga pontual $\rho = e_q \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ e $j_i = 0$, assim,

$$\begin{aligned}(\square + m^2)A_\mu &= j_\mu \\ (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi &= \rho = j_0\end{aligned}\tag{2.6}$$

Utilizando o método de Green, a função de Green $G(\vec{x}, \vec{y})$ deve satisfazer:

$$(-\vec{\nabla}^2 + m^2)G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\tag{2.7}$$

A solução ϕ pode ser expressa em termos da função de Green e da densidade de carga ρ como:

$$\phi = \int d^3\vec{y} G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y})\tag{2.8}$$

e neste caso via transformada de Fourier de $G(\vec{x}, \vec{y})$, temos,

$$\begin{aligned}G(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} G(\vec{k}) \\ G(\vec{x}, \vec{y}) &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) G(\vec{k})\end{aligned}\tag{2.9}$$

Logo,

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2}\tag{2.10}$$

Portanto podemos calcular o potencial ϕ gerado por uma carga pontual,

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{y} \int d^3\vec{k} \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}}{k^2 + m^2} e_q \delta^3(\vec{y}) \\
&= \frac{e_q}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{y} \delta^3(\vec{y}) \int d^3\vec{k} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{k^2 + m^2} \\
&= \frac{e_q}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{k^2 + m^2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{e_q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k^2 \sin \theta \frac{e^{-ikx \cos \theta}}{k^2 + m^2} d\varphi d\theta dk, \quad \begin{cases} u = \cos \theta \\ du = -\sin \theta d\theta \end{cases} \\
&= \frac{e_q}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{-ikxu} du dk \Rightarrow \frac{e_q}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + m^2} \frac{ie^{-ikxu}}{kx} \Big|_{-1}^1 dk \\
&= \frac{e_q}{4\pi^2 x} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} i(e^{-ikx} - e^{ikx}) dk \Rightarrow \frac{e_q}{4\pi^2 x} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} i(-2i \sin kx)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\phi = \frac{e_q}{2\pi^2 x} \int_0^\infty \frac{k \sin kx}{k^2 + m^2} dk \tag{2.13}$$

Para resolver a integral anterior, podemos utilizar o teorema de Cauchy dos pólos e resíduos¹ ou a transformada de Laplace, utilizando, portanto, a transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}
I = f(x) &= \int_0^\infty \frac{k \sin kx}{k^2 + m^2} dk \Rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k \sin kx}{k^2 + m^2} e^{-sx} dx dk \\
\mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + m^2} \mathcal{L}\{\sin kx\} dk, \quad \mathcal{L}\{\sin kx\}(s) = \frac{k}{k^2 + s^2}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

observe que, $\mathcal{L}\{\sin kx\}$ é uma transformada de Laplace já conhecida, substituindo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^\infty \frac{k^2}{(k^2 + m^2)(k^2 + s^2)} dk = \frac{1}{s^2 - m^2} \int_0^\infty \frac{s^2}{k^2 + s^2} - \frac{m^2}{k^2 + m^2} dk \\
\mathcal{L}\{f(x)\} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{s + m} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + m} \right\} = \frac{\pi}{2} e^{-mx}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{e_q}{4\pi x} e^{-mx} \quad (\text{Yukawa}) \\
&= \frac{e_q}{4\pi x} \quad (m = 0, \text{Coulomb})
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Observe que com a massa muito grande implica em interação de curto alcance pois $\lambda_Y = m^{-1}$. No sistema internacional de unidades o comprimento fenomenológico de Yukawa λ_Y é dado pela relação ($[L][M] = [\hbar]^x [c]^y$, $x = 1$ e $y = -1$)

¹ Sendo, $\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikx}}{(k-im)(k+im)} dk \rightarrow \oint_C f(k) dk = 2\pi i \cdot \text{Res}(f(k), k = im)$, $I = \pi e^{-mx}$

$$m_Y = \frac{\hbar}{e\lambda_y c}$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{34} Js$$

$$c = 3 \times 10^8 m/s$$

$$e = 1.602 \times 10^{19} C \quad (2.17)$$

onde supondo que o comprimento de Yukawa é em escala próximo ao tamanho em femtômetros do próton (0,84 fm) chegamos ao resultado $m_Y \sim 235 \frac{MeV}{c^2}$. Como percebemos, a relação entre o comprimento e a massa nos ajudam a entender as escalas de atuação de uma dada força investigada.

Por outro lado, retornamos na equação $\vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi$, escrevendo a mesma em coordenadas esféricas e resolvendo o setor radial,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) &= m^2 \phi \\ \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - m^2 \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

denotando um potencial do tipo $U = r\phi$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\phi + r \frac{d\phi}{dr} \right) \\ &= r \frac{d^2 \phi}{dr^2} + 2 \frac{d\phi}{dr} \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo assim, a partir da relação entre (2.18) e (2.19),

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = m^2 U \quad (2.20)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} U &= U_0 e^{\pm mr} \\ \phi &= \frac{U_0 e^{\pm mr}}{r} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por fim, dada a densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A_\mu \eta^{\mu\nu} \square A_\nu + m^2 A_\mu A^\mu) + A_\mu j^\mu \quad (2.22)$$

poderíamos nos perguntar quais seriam os requisitos para que a mesma seja invariante sob a simetria de calibre $U(1)$ local,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.23)$$

Utilizando o truque envolvendo campos compensadores de Stüeckelberg, $G^{\mu\nu}$ e B^μ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A_\mu (\eta^{\mu\nu} \square - G^{\mu\nu}) A_\nu + m^2 (A_\mu - B_\mu) (A^\mu - B^\mu)) + A_\mu j^\mu \quad (2.24)$$

para a Lagrangiana seja invariante, $\delta\mathcal{L} = 0$, logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \\ &= \mathcal{L} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \alpha (\eta^{\mu\nu} \square - G^{\mu\nu}) \partial_\nu \alpha - m^2 (B_\mu + \partial_\mu \alpha) (B^\mu + \partial^\mu \alpha)) + \partial_\mu (j^\mu \alpha) \end{aligned} \quad (2.25)$$

assim conclui-se que:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \\ B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \\ \partial_\mu j^\mu = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

O campo compensador B_μ surge na quebra espontânea de simetria como um bóson de Goldstone [31].

Os conceitos aqui apresentados, como massa e simetria de calibre, iram ser revisitados e sofisticados nesse empreendimento do saber, com novos mecanismos, ferramentas e abordagem, seguindo a filosofia de Heráclito: "Nada é permanente, exeto a mudança".

3 Teorias de calibre com quebra espontânea de simetria e teorema de Goldstone

Antes de iniciar efetivamente a discussão sobre o conceito de quebra espontânea de simetria, farei um breve comentário sobre as simetrias e apresentarei um exemplo elementar de quebra espontânea de simetria para elucidar o que será feito no que segue.

Como de praxe na Física, buscamos por simetrias (translação, rotação, de Lorentz, etc.), pois são uma ótima ferramenta na compreensão dos fenômenos e estão intimamente ligadas às leis de conservação (momento, momento angular, energia, etc.). Além disso, de maneira axiomática, exigimos que as leis físicas sejam invariantes sob transformações, e no escopo da própria física, essa abordagem tem ganhado sua relevância por trazer a unificação das teorias (princípio de *gauge*), como por exemplo a teoria Eletromagnética e a Mecânica Classica ou até mesmo o Modelo Padrão.

Como já mencionado, a exploração das simetrias internas é conduzida pelos teoremas de

Emmy Noether, e o grupo de interesse é o grupo $U(1)$ (*Unitary Group*), que nos conduz às simetrias e às leis de conservação. Além disso, o outro grupo de interesse é o Grupo $SU(2)$ (*Special Unitary Group*), que se apresenta necessário para a generalização do grupo de *gauge*² $U(1)$ para um caso de grupo de *gauge* não-abeliano³ (Yang e Mills, 1954).

Agora, não menos importante que as simetrias, trarei um exemplo elementar de quebra espontânea de simetria. Isso servirá como um prelúdio para as seções subsequentes, que serão desenvolvidas de maneira mais rigorosa (digamos, divertida) abordando a quebra espontânea de simetria. Posteriormente, abstrairmos uma conclusão importante na compreensão física do fenômeno.

Podemos considerar como exemplo elementar de quebra espontânea de simetria utilizando uma função senoidal $f(x)$ qualquer, contínua em todo o domínio dos números reais ($x \in \mathbb{R}$), que possui simetria por reflexão (\mathbb{Z}_2) no ponto x . No entanto, ao escolhermos outro ponto de $f(x)$ e nos deslocarmos uma certa fase por motivos de conveniência (como veremos no caso físico, o ponto conveniente é o de mínima energia (estacionário)), tal como o ponto $x + \varepsilon^4$, perdemos a simetria de $f(x)$. Assim, dizemos que ocorreu uma quebra espontânea de simetria, mas observe que não alteramos em nada a $f(x)$ e a simetria ainda existe.

3.1 Teorias de calibre com simetria global e local

Como é costume na física, discutimos simetrias por meio da seguinte quantidade:

$$S = \int_{\Omega} L(Q^A, \partial_{\mu} Q^A) d^4x \quad (3.1)$$

denominada ação, a quantidade Q^A é chamada de campos de matéria, tendo em vista que esta contém toda informação associada às partículas.

Um sistema físico que apresenta simetria global é definido como aquele em que a ação é invariante perante as transformações

$$\begin{cases} Q^A \rightarrow Q'^A = \exp[iT_{(a)}\varepsilon^a]^A_B Q^B = Q^A + \delta Q^A \\ \delta Q^A = T_{(a)}^A_B \varepsilon^a Q^B \end{cases} \quad (3.2)$$

devido a atuação de um elemento do grupo de Lie próximo a identidade. Como a transformação U pertence ao grupo de simetria estudado

$$U = \exp[iT_{(a)}\varepsilon_a] \exp[iT_{(b)}\varepsilon_b] \exp[-iT_{(a)}\varepsilon_a] \exp[-iT_{(b)}\varepsilon_b]$$

²Os grupos $U(1)$ e $SU(2)$ são Grupos de Lie, aqui refiro como grupo de *gauge* por possuir certa invariancia de *gauge* local e global.

³O Grupo é dito abeliano se as operações de multiplicação do Grupo for comutativa; caso contrario é não-abeliano.

⁴ ε se assume como constante, não depende do espaço-tempo.

$$\begin{aligned}
&= 1 - \varepsilon_a \varepsilon_b [T_{(a)}, T_{(b)}] \\
&= 1 + iT_{(c)} \varepsilon^c
\end{aligned} \tag{3.3}$$

temos uma algebra associada ao grupo e as respectivas constantes de estrutura

$$\begin{aligned}
[T_{(a)}, T_{(b)}] &= i f_{ab}^c T_{(c)} \\
f_{ab}^c &= \frac{\varepsilon^c}{\varepsilon_a \varepsilon_b}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Os conceitos matemáticos podem ser esquematizados Figura 1.

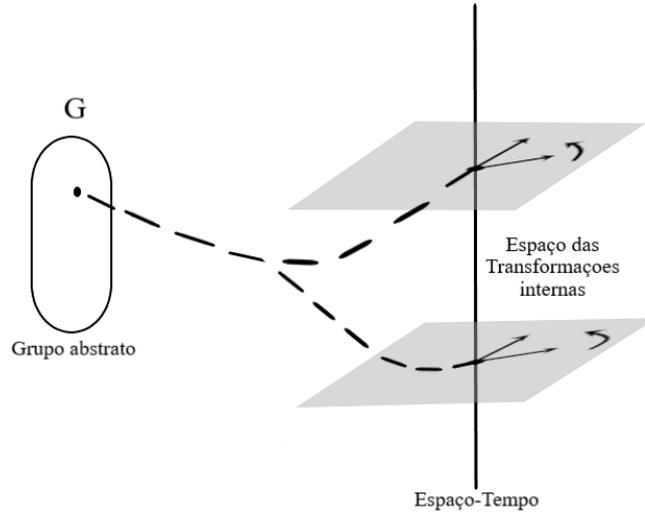


Figura 1: Esquematização do Espaço das Transformações

Se estendermos o grupo G , supondo que os parâmetros $\varepsilon^a(x)$ dependam do ponto no espaço-tempo, automaticamente a ação não será invariante perante a atuação deste grupo estendido G' *pitagóricamente* Figura 2. De fato, os termos cinéticos (que contêm derivadas) da Lagrangiana na Equação (3.1) fazem com que a ação não seja invariante. Logo,

$$S = \int_{\Omega} L(Q^A, \partial_{\mu} Q^A + (\partial_{\mu} \varepsilon^a) Q^A) d^4 x \tag{3.5}$$

e assim a lagrangiana agora contêm termos com $\partial_{\mu} \varepsilon^a$.

Para contornar o problema, é necessário a introdução de um novo campo A_{μ}^a , o qual tem a interpretação de medidor de interação, em decorrência da adição de um novo campo, será necessário substituímos a derivada convencional pela derivada covariante ($\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu}$), com o intuito de mantermos a ação (3.5) invariante perante a atuação de um novo parâmetro. Veja que o problema que estamos tratando se assemelha ao transporte paralelo. Porém,

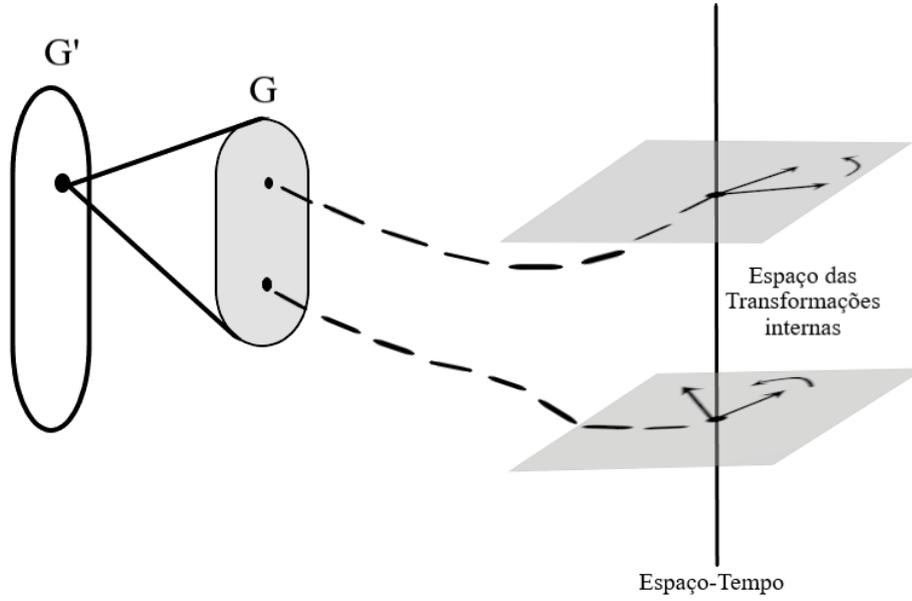


Figura 2: Esquemática do Espaço das Transformações extendido

afirmo que não é exatamente o mesmo. No transporte paralelo, queremos mover um vetor qualquer em um espaço curvilíneo e exigimos que o ângulo de partida e de chegada desse vetor, no mesmo ponto, seja nulo. Para alcançar isso, descrevemos um plano tangente pertencente e contínuo nesse espaço que muda à medida que se move ao longo dessa variedade curva. A conexão que realiza esse processo é representada pelo tensor de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ (tensor curvatura), que depende do tensor métrico $g^{\mu\nu}$. No entanto, nossa conexão $T_{(a)B}^A$ no problema em questão não depende da métrica, pois não faz sentido a métrica aparecer em espaços diferentes (não medimos distância em espaços distintos), nossa conexão atua em espaços diferentes, transportando uma quantidade de um espaço para o outro, ao contrário do transporte paralelo, no qual o transporte ocorre no mesmo espaço, por esse motivo a métrica surge.

A conexão do nosso problema é estruturada pelos geradores das matrizes de $SU(N)$, e o número de geradores é dado tendo em vista a dimensão de uma matrix H (espaço vetorial onde o produto interno é dado pela operação de traço) com N entradas no corpo dos complexos e dada por

$$U_{N \times N} = \exp[iH] \quad (3.6)$$

e neste caso H tem dimensão $\dim H = 2N^2$. Agora a condição de unitariedade $U^\dagger = U^{-1}$ implica que H é hermitiana ($H^\dagger = H$) e neste caso devemos eliminar não apenas um setor triangular Δ dessa matrix

$$2N^2 = 2N + 2\Delta \quad (3.7)$$

mas também N elementos da diagonal por serem reais. Logo

$$\dim H = 2N^2 - \Delta - N = N^2. \quad (3.8)$$

Por fim a condição especial $\det U = \exp[\text{tr} \ln(U)] = 1$ nos levam a concluir que $\text{tr} H = 0$ e neste caso eliminando mais uma variável ou dimensão somos conduzidos ao resultado de que número de geradores são dados por $\dim H = N^2 - 1$. Observe que estamos utilizando a seguinte identidade $\det[U] = \exp[\text{tr} \ln U]$. Apenas para justificar a passagem anterior, podemos utilizar como guia de pensamento uma matriz U com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} U \vec{\lambda}_i &= \lambda_i \vec{\lambda}_i \quad \det[U - \lambda I] = 0 \quad \vec{\lambda}_i = W e_i \Rightarrow (W^{-1} U W) e_i = \lambda_i e_i \\ \det[W^{-1} U W] &= \det[G] = \prod_i \lambda_i \quad \text{tr}[W^{-1} U W] = \text{tr}[U] \end{aligned} \quad (3.9)$$

então,

$$\ln[\det U] = \ln[\prod_i \lambda_i] = \sum_i \ln[\lambda_i] = \text{tr} \ln U. \quad (3.10)$$

No caso de $SU(2)$ $\dim H = 3$ e escrevemos o espaço vetorial H em termos das matrizes de Pauli ($H = T_{(a)} \varepsilon^a$, $a = 1, 2, 3$).

Obteremos ao final do estudo partindo da ação inicial e procurando um sistema físico com simetria local, ou seja, uma ação a qual é invariante perante a transformação devido a atuação de um elemento do grupo G'

$$L(\text{matéria, radiação, interações}) = L(Q^A, D_\mu Q^A) + L_0(F_{\mu\nu}^a)$$

$$\begin{cases} D_\mu \exp[iT_{(a)} \varepsilon^a] Q = \exp[iT_{(a)} \varepsilon^a] D_\mu Q \\ D_\mu Q^A = \partial_\mu Q^A - T_{(a)}^A{}_B Q^B A_\mu^a \\ [D_\mu, D_\nu] = iT_{(a)} F_{\mu\nu}^a \\ F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \end{cases} \quad (3.11)$$

onde as transformações locais são regidas pelas equações abaixo

$$\begin{cases} Q^A \rightarrow Q^A + \delta Q^A \\ A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a \\ \delta Q^A = T_{(a)}^A{}_B \varepsilon^a(x) Q^B \\ \delta A_\mu^a = f_{cb}^a A_\mu^b \varepsilon^c(x) + \partial_\mu \varepsilon^a(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

Observe que os campos A_μ^a e o tensor $F_{\mu\nu}^a$ se transformam na representação adjunta da

simetria de calibre global investigada

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = \exp[iT_{(a)}\varepsilon^a]A_\mu \\
A_\mu &= A_\mu + \delta A_\mu \\
\delta A_\mu &= T_{(a)}\varepsilon^a A_\mu
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

$$[T_{(a)}, T_{(b)}] = if_{ab}^c T_{(c)} \tag{3.14}$$

em que os geradores são as próprias constantes de estrutura do grupo $T_{(a)bc} = -if_{(a)bc}$ pois temos uma identidade de Jacobi sendo satisfeita

$$[T_{(a)}, [T_{(b)}, T_{(c)}]] + [T_{(b)}, [T_{(c)}, T_{(a)}]] + [T_{(c)}, [T_{(a)}, T_{(b)}]] = 0. \tag{3.15}$$

Como sabemos, o princípio de simetria de calibre contribuiu para o desenvolvimento da Física e sempre é protagonista na busca por uma teoria unificada que consiga descrever as interações da natureza (eletromagnética, fraca, forte e gravitacional), com a simetria de calibre determinando de forma consistente a interação ou acoplamento entre matéria, radiação, e suas auto-interações. No eletromagnetismo a simetria de calibre global U(1) nos leva a conservação da carga elétrica e se implementarmos na lagrangiana termos em que acoplamos essa corrente com campos ($J \times A$) somos conduzidos a uma teoria com simetria de calibre local onde o conceito de derivada covariante aparece naturalmente no acoplamento entre elétrons e fótons. Seguindo a suposição de que o princípio de calibre advindo do eletromagnetismo poderia ser estendido e utilizado como base para descrever outras interações seremos levados, inclusive historicamente, a 3 prescrições independentes, porém complementares:

- Tendo em vista o desenvolvimento e a descrição das interações fortes por Heisenberg, Tamm e Yukawa, em que partículas nucleares (protons e neutrons) estariam trocando mésons (píons), Yang and Mills retomam o empreendimento de Weyl, no esforço de explicar a interação forte generalizando a simetria de fase SU(2) (isospin global) para um patamar local, onde aparece o conceito geométrico de derivada covariante. Porém, como era bem sabido por Pauli, as partículas intermediadoras dessa interação associada a simetria de isospin local são não massivas, contradizendo o fato da interação forte ser descrita por uma interação de curto alcance e partículas massivas. [1]

- Observando a atenção dada por Dirac na análise da simetria de calibre da época e o trabalho de Schwinger, Shaw percebeu que a simetria de calibre do eletromagnetismo U(1) apresentado na sua forma real bidimensional SO(2) poderia ser generalizado para SU(2), onde teríamos campos vetoriais auto-interagindo, estendendo o trabalho de seu orientador de doutorado (Salam) sobre campos escalares com auto-interação. Implicitamente na abordagem de Shaw, vemos um forte apelo algébrico de implementarmos na lagrangiana

termos do tipo corrente-campo com o intuito de obtermos uma simetria de calibre local iterativamente. [2,3]

- Paralelamente, Utiyama estabelece um conjunto de diretrizes para construir uma teoria de gauge para todos os grupos de Lie semi-simples e inclui também no trabalho, a relação entre a gravitação na formulação de tetradas e o eletromagnetismo via conexão. De forma geral, alguns sistemas físicos descritos por campos são considerados invariantes sobre um certo grupo de transformações onde percebemos como exemplo, que campo eletromagnético, gravitacional e de Yang-Mills seguem essa linha de raciocínio. [4]

Pois bem, nosso objetivo a partir deste momento é estudar o comportamento de sistemas físicos com essas simetrias (global e local), devido a pequenas perturbações nos campos.

3.2 Quebra Espontânea de Simetria Global $U(1)$ - Nambu-Goldstone bosons

Vamos considerar o caso mais simples de simetria contínua, a simetria $U(1)$, assim consideraremos como objeto de estudo a densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda(\varphi^* \varphi)^2 \\ &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(\varphi^*, \varphi)\end{aligned}\tag{3.16}$$

o campo escalar complexo φ poder ser expresso em termos de campos reais φ_1 e φ_2

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \rightarrow \text{na forma polar} \rightarrow \varphi = |\varphi|e^{i\alpha}\tag{3.17}$$

Assim de imediato podemos observar que a Lagrangiana (3.16) é invariante sob transformações globais $U(1)$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi e^{i\alpha}$$

e invariante sob rotações $SO(2)$ em termos dos campos reais φ_1 e φ_2 .

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Portanto, a Lagrangiana apresenta uma simetrias contínuas, uma vez que o ângulo de fase (α) pode adotar qualquer valor dentro do conjunto contínuo.

Apartir da seguinte relação da Equação (3.17) podemos escrever o campo da seguinte maneira, $\sqrt{2}|\varphi| = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$, e o potencial pode ser expresso como;

$$V(|\varphi|) = -2\mu^2|\varphi|^2 + 4\lambda|\varphi|^4\tag{3.18}$$

calculando os pontos criticos do Potencial,temos que;

$$\left. \frac{\partial V}{\partial |\varphi|} \right|_{V|\varphi|=0} = (-\mu^2 + 2\lambda|\varphi|^2)|\varphi|^2 = 0 \quad (3.19)$$

As soluções são, $|\varphi| = 0$ e $|\varphi_0| = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}$, a solução para $|\varphi| = 0$ a simetria $U(1)$ não é quebrada, as outras soluções são um conjunto de mínima energia $\varphi = e^{i\alpha}|\varphi_0|$ (círculo de mínimos).

Admitindo que $\mu^2 > 0$, assim, neste caso o potencial $V(|\varphi|)$ assume a 'forma de um chapéu mexicano'. Sendo o potencial definido a menos uma constante Figura 3.

Escolhendo um dos estados de energia mínima como o estado fundamental e realizando

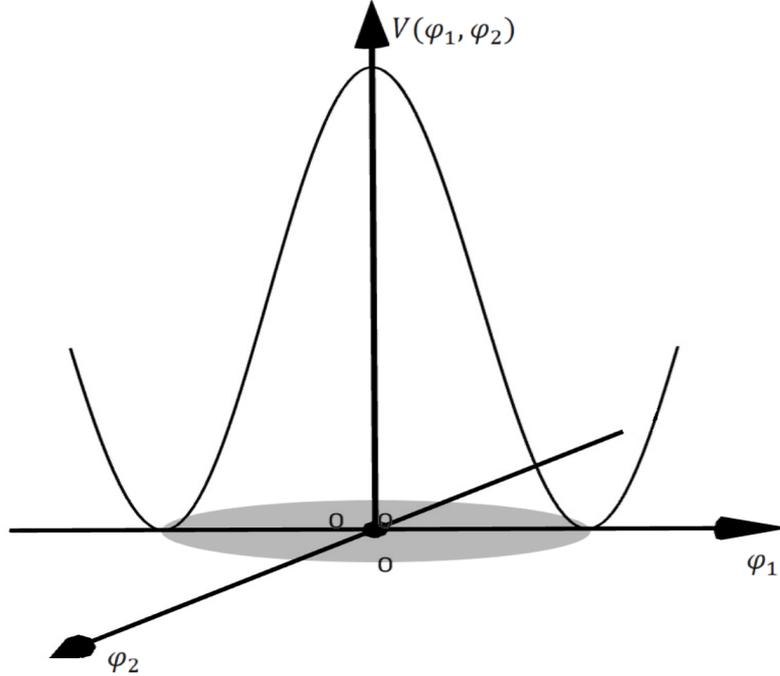


Figura 3: Potencial $V(\varphi_1, \varphi_2)$, $\mu^2 > 0$

pequenas excitações em torno dele, segue que:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 + \chi \\ \varphi_2 = \theta \end{cases} \quad \forall \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \\ (\theta, \chi) \sim 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Assim escrevendo o Potencial (3.18) em termos dos campos reais φ_1 e φ_2 e fazendo as substituições da condição (3.20), o Potencial terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(\chi, \theta) &= -\frac{1}{2}\mu^2 [(\varphi_0 + \chi)^2 + \theta^2] + \frac{1}{4}\lambda [(\varphi_0 + \chi)^2 + \theta^2]^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \\ &\simeq \mu^2\chi^2 + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observe que no potencial não há termos como θ^2 ou $\theta\chi$. Isso é evidenciado na Figura 3: os termos quadráticos em θ e χ no potencial representam as curvaturas do potencial ao longo das direções φ_1 e φ_2 ; a curvatura do potencial ao longo da direção φ_2 é igual a zero no ponto $\varphi_1 = \varphi_0$ devido à simetria $U(1)$.

Deste modo a densidade de Lagrangiana quadrática é igual a

$$L_{\chi,\theta}^{(2)} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta)^2 - \mu^2\chi^2 \quad (3.22)$$

Portanto, o campo $\varphi_1 \rightarrow \chi$ possui uma massa $m_\chi \approx \sqrt{2}\mu$ enquanto o campo $\varphi_2 \rightarrow \theta$ permanece sem massa. Em virtude, a interpretação quântica de um campo sem massa nos conduz à definição de uma partícula conhecida como bóson de Nambu-Goldstone.

3.3 Quebra Espontânea de Simetria Local $U(1)$ - Mecanismo de Higgs

A próxima etapa é conectar a interação eletromagnética e calcular as perturbações nas extremidades do estado de menor energia. Seguindo a prescrição da seção anterior e considerando um modelo com simetria $U(1)$, escolhemos a densidade lagrangiana na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*D^\mu\varphi + \mu^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \\ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*D^\mu\varphi - V(\varphi^*,\varphi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Graus de Liberdades Físicos $2 + 2$.

sendo, φ é o campo escalar complexo, $F_{\mu\nu}$ é o Tensor de campo Elétricomagnético e D_μ a derivada covariante.

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \end{cases} \quad (3.24)$$

A Lagrangiana (3.23) é invariante sob transformações de *gauge*,

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \\ \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \end{cases} \quad (3.25)$$

$\alpha(x)$ é uma função real arbitrária.

Para encontrarmos o estado de menor energia, escrevemos a densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}\dot{\varphi}^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}}\dot{A} - \mathcal{L}$$

Sendo assim podemos expressar o funcional de energia em função dos campos A_μ e φ :

$$E(A_\mu, \varphi) = \int_{\text{all space}} d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi + V(\varphi^* \varphi) \right] \quad (3.26)$$

Para uma melhor compreensão do que se segue, podemos separar os campos elétricos e magnéticos, assim como as coordenadas temporais e espaciais, nas derivadas. Então abrindo as equações temos que

$$\begin{aligned} E &= \int_{\text{all space}} d^3\vec{x} \left[\frac{1}{4} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) + ((\hat{e}^0 D_0 + \hat{e}^i D_i) \varphi)^* (\hat{e}_0 D^0 + \hat{e}_j D^j) \varphi + V(\varphi^* \varphi) \right] \\ &= \int_{\text{all space}} d^3\vec{x} \left[\frac{1}{4} (2F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) + (D_0 \varphi)^* D^0 \varphi + \delta_j^i (D_i \varphi)^* D^j \varphi + V(\varphi^* \varphi) \right] \\ &= \int_{\text{all space}} d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} (F_{i0})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + (D_0 \varphi)^* D^0 \varphi + (D_i \varphi)^* D^i \varphi + V(\varphi^* \varphi) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Imediatamente, podemos observar uma liberdade na escolha dos campos A_μ e φ que minimizam a energia $E(A_\mu, \varphi)$. Note que a energia $E(A_\mu, \varphi)$ é um estado fundamental se e somente se $E(A'_\mu, \varphi')$ também for um estado fundamental para qualquer $\alpha(x)$ (isso devido à invariância (3.25)). Sendo assim, a expressão (3.27) é mínima quando os campos elétricos F_{0i} e magnéticos F_{ij} são nulos e os termos diferenciais são mínimos quando $D_\mu \varphi = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \\ (\partial_\mu - i \partial_\mu \alpha(x)) \varphi = 0 \\ \varphi = e^{i\alpha(x)} \varphi_0 \quad \forall \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \end{cases} \quad (3.28)$$

Onde a constante φ_0 foi calculada a partir da minimização do Potencial (3.18) na seção anterior.

Assim como na seção anterior, precisamos escolher um desses estados de vácuo⁵ determinados pelas equações (3.28) e estudar perturbações sobre ele. Vamos selecionar o estado $\alpha = 0$ e calcular pequenas perturbações dos campos em torno desse estado de energia mínima.

Consideramos as perturbações do campo φ expresso por dois campos reais $\chi(x)$ e $\theta(x)$, de modo que;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_0 + \chi(x) + i\theta(x)) \quad (3.29)$$

⁵Na teoria de campos, o termo é utilizado para se referir ao estado de energia mínima.

Em ordem quadrática nos campos, recordamos do Potencial (3.21)

$$V(|\varphi|) \simeq \mu^2 \chi^2$$

e agora a derivada tem a forma:

$$D_\mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \chi + i \partial_\mu \theta - i e \varphi_0 A_\mu)$$

Desde modo a densidade quadrática da Lagrangiana será

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} |\partial_\mu \chi + i \partial_\mu \theta - i e \varphi_0 A_\mu|^2 - \mu^2 \varphi^2 \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} |e \varphi_0 A_\mu - \partial_\mu \theta|^2 - \mu^2 \chi^2 \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{e^2 \varphi_0^2}{2} \left(A_\mu - \frac{1}{e \varphi_0} \partial_\mu \theta \right)^2 - \mu^2 \chi^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Observamos que agora na Lagrangiana (3.30) surge um termo cruzado incomum $A_\mu \partial_\mu \theta$ (interação), bem como os termos quadráticos A_μ^2 e $\partial_\mu \theta^2$. Para mantermos a Lagrangiana em seu formalismo canônico, ou seja, a Lagrangiana total ser a soma das Lagrangianas, mudamos as variáveis dos campos e introduzimos o campo

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e \varphi_0} \partial_\mu \theta \quad (3.31)$$

Perceba que, inicialmente, a Lagrangiana (3.23) tem dois graus físicos de liberdade para o campo A_μ e dois para o campo escalar complexo φ . Depois de inserirmos um novo campo B_μ , a Lagrangiana continua com o mesmo número de graus de liberdade (o grau de liberdade físico é conservado), porém agora são três graus de liberdade associados ao novo campo B_μ e um para o campo escalar χ . Assim, a Lagrangiana quadrática terá a forma

$$L^{(2)} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} e^2 \varphi_0^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 \quad (3.32)$$

- Graus de Liberdades Físicos 3 + 1.

sendo, $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

O aspecto interessante da Lagrangiana (3.32) é o surgimento do campo vetorial massivo B_μ com massa $m_B^2 \approx e^2 \varphi_0^2$ e a ausência do campo de Nambu-Goldstone $\theta(x)$. Podemos dizer então que o campo de *gauge* 'engole' o campo de Nambu-Goldstone, adquirindo massa. A essência do mecanismo de Higgs está contida nessa afirmação. Existe outros mecanismos na literatura com a possibilidade de geração de massa para as partículas como o caso da geração dinâmica de massa ou a blindagem de Debye [25, 32], por exemplo.

3.4 Caso geral

a) *Teorema de Goldstone*

Consideramos uma densidade Lagrangiana para a qual o grupo G é um grupo compacto de simetria global, e considerando a teoria de campos escalares, onde φ , por definição, assumiremos serem reais. Logo, a Lagrangiana pode ser expressa como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) \quad (3.33)$$

no qual o termo cinético é o produto escalar no espaço dos campos.

Sendo $T(w)$, $w \in G$ uma representação unitária de G , a invariância da Lagrangiana sob a ação do grupo G implica no potencial, o que nos leva a exigir que

$$V(\varphi) = V(T(w)\varphi) \quad \forall w \in G$$

Suponhamos que exista uma configuração de campo a qual minimize o potencial, que representamos como

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Suponhamos também que H é um subgrupo de G tal que

$$T(h)\varphi_0 = \varphi_0 \quad \forall h \in H$$

Denominamos H de subgrupo inquebrável⁶ do modelo. Considerando t_h como os geradores do subgrupo inquebrável H , uma vez que os elementos $(1 + \varepsilon^h t_h)$ estão próximos a unitariedade de H , o seguinte se aplica a eles

$$\begin{aligned} T(1 + \varepsilon^h t_h)\varphi_0 &= \varphi_0 \quad \varepsilon^h \sim 0 \\ (1 + \varepsilon^h T(t_h))\varphi_0 &= \varphi_0 \\ T_h\varphi_0 &= 0 \quad T(t_h) \equiv T_h \end{aligned} \quad (3.34)$$

A designação anterior decorre do resultado seguinte, seja: $\varphi = \varphi_0 + \chi(x)$, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\chi(\chi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi, \partial^\mu\chi) - V(\varphi_0 + \chi) \\ &= \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) \end{aligned} \quad (3.35)$$

⁶pelo motivo que: $\forall h \in G$ as operações do grupo são safisfeitas, assim sendo $T(h_1 h_2)\varphi_0 = T(h_1)T(h_2)\varphi_0 = T(h^{-1})T(h)\varphi_0 = T(h^{-1})\varphi_0 = \varphi_0$, $h_1, h_2, h^{-1} \in H$ segue das propriedades básicas das representações de grupo

Neste caso;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(T(h)\chi) &= \mathcal{L}(\varphi_0 + T(h)\chi) \\
&= \mathcal{L}(T(h)(\varphi_0 + \chi)) \\
&= \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Assim, a partir das relações das Equações (3.35) e (3.36), conclui-se que

$$\mathcal{L}(T(h)\chi) = \mathcal{L}_\chi(\chi) \tag{3.37}$$

Portanto, $\mathcal{L}_\chi(\chi)$ é invariante sob o grupo global H . Seja h qualquer elemento do grupo H . Além disso, observa-se que $\mathcal{L}(\varphi)$ é invariante sob todo o grupo G e, particularmente, sob seu subgrupo H , devido à linearidade do operador $T(h)$.

Dividimos então os geradores do grupo G em duas famílias: $\{t_h\}$ e $\{t_s\}$, onde t_h são geradores do grupo H e t_s são geradores complementares

$$\dim G = \dim H + \dim S$$

Nesse sentido, nas proximidades do elemento identidade

$$\begin{aligned}
T(1 + \varepsilon^h t_h + \varepsilon^s t_s)\varphi_0 &= (1 + \varepsilon^h T_h + \varepsilon^s T_s)\varphi_0 \\
&= (1 + \varepsilon^s T_s)\varphi_0 \\
&\neq \varphi_0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

pois caso contrário $T_s \in H$. Dessa forma, garantimos que T_s são linearmente independentes

$$\varepsilon^s(T_s\varphi_0) = 0 \iff \varepsilon^s = 0$$

Vamos utilizar o fato anterior para escrever as perturbações da seguinte forma:

$$\chi(x) = \theta^s(x)T_s\varphi_0 + \eta(x) \tag{3.39}$$

onde $\eta(x)$ inclui os modos que faltam.

Pois bem, considerando a expressão

$$V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) \tag{3.40}$$

onde g é um elemento do grupo G da forma: $g = 1 + \theta^s T_s + O(\theta^2)$.

Como o Potencial (3.40) é invariante perante a atuação de G

$$V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) = V((\varphi_0 + \eta))$$

Por outro lado,

$$V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) = V(\varphi_0 + \theta^s T_s \varphi_0 + O(\theta^2) + \theta^s T_s \eta + \eta) \quad (3.41)$$

Expandindo a equação (3.41) em torno do ponto $(\varphi_0 + \theta^s T_s \varphi_0 + \eta)$ e negligenciando os termos de ordem cúbica ou superiores, teremos que:

$$\begin{aligned} V(T(g)(\varphi_0 + \eta)) &= V(\varphi_0 + \theta^s T_s \varphi_0 + \eta) + \left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0 + \theta^s T_s \varphi_0 + \eta) \right] (O(\theta^2) + \theta^s T_s \eta) \\ &= \dots + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \varphi_0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \theta^s T_s \varphi_0 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \eta \right)}_0 (O(\theta^2) + \theta^s T_s \eta) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Logo, em ordem quadrática concluímos que

$$V(\varphi_0 + \theta^s T_s \varphi_0 + \eta) = V(\varphi_0 + \eta) \quad (3.43)$$

Em outras palavras, o potencial não contém os campos $\theta^s(x)$. Assim, o teorema de Goldstone afirma que, em uma teoria com simetria global quebrada espontaneamente, existem campos escalares (ou pseudoescalares) sem massa.

b) *Mecanismo de Higgs*

Extendendo a densidade lagrangiana anterior com a finalidade dessa possuir invariância local

$$\begin{cases} \mathcal{L} = L_0(F_{\mu\nu}^a) + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi, D^\mu \varphi) - V(\varphi) \\ D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - T_{(a)} \varphi A_\mu^a \end{cases} \quad (3.44)$$

Pertubando o campo, $\varphi = \varphi_0 + \chi$, assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= L_0(F_{\mu\nu}^a) + \frac{1}{2}(D_\mu(\varphi_0 + \chi), D^\mu(\varphi_0 + \chi)) - V(\varphi_0 + \chi) \\ &= L_0(F_{\mu\nu}^a) + \frac{1}{2}(D_\mu \varphi_0 + D_\mu \chi, D^\mu \varphi_0 + D^\mu \chi) - V(\varphi_0 + \chi) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Perceba que na densidade Lagrangiana (3.35) surge um termo no formato, $(D_\mu \varphi_0, D^\mu \varphi_0)$, expandindo a expressão:

$$\begin{aligned} (D_\mu \varphi_0, D^\mu \varphi_0) &= (\partial_\mu \varphi_0 - T_{(a)} \varphi_0 A_\mu^a, \partial^\mu \varphi_0 - T_{(b)} \varphi_0 A^{b\mu}) \\ &= \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \varphi_0 - \partial_\mu \varphi_0 (T_{(b)} \varphi_0 A^{b\mu}) - (T_{(a)} \varphi_0 A_\mu^a) \partial^\mu \varphi_0 + (T_{(a)} \varphi_0 A_\mu^a) (T_{(b)} \varphi_0 A^{b\mu}) \\ &= (T_{(a)} \varphi_0 A_\mu^a) (T_{(b)} \varphi_0 A^{b\mu}) \rightarrow (T_{(a)} \varphi_0, T_{(b)} \varphi_0) A_\mu^a A^{b\mu} \end{aligned}$$

Assim, observa-se um termo na Lagrangiana do tipo, $(T_{(a)} \varphi_0, T_{(b)} \varphi_0) A_\mu^a A^{b\mu}$. Quando

$T_{(a)} = T_s$ vemos que os campos de calibre adquirem massa

$$\begin{aligned} m_{ab}^2 &= (T_{(a)}\varphi_0, T_{(b)}\varphi_0) \\ m_s^2 &= |T_s\varphi_0|^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto, demonstramos a afirmação anterior de que os campos de calibre adquirem massa ao engolir o campo de Nambu-Goldstone, e assim o número de graus de liberdade físicos permanece inalterado.

3.5 Um caso não-abeliano de quebra espontânea de simetria - $SU(2)$

Tendo em vista as subseções anteriores sobre a quebra espontânea de simetria do grupo $U(1)$, nosso objetivo agora é generalizar o caso para um grupo não-abeliano (uma vez que $U(1)$ é um grupo abeliano). Inicialmente, a principal diferença que podemos apontar é a dependência do campo $A_\mu(x)$ de um ponto arbitrário no espaço-tempo, de modo que o tensor de campo $F_{\mu\nu}(x)$ não se expanda mais de maneira trivial (como um 'rotacional' (3.24)). Mas mesmo assim é intuitivo denotarmos o tensor de campo $F_{\mu\nu}(x)$ como:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.47)$$

De maneira que, se os campos A_μ e A_ν comutarem ($[A_\mu, A_\nu] = 0$), voltamos ao caso (3.24). Pois bem, assumindo que o campo de *gauge* $A_\mu(x)$ assume valores na álgebra de $SU(2)$, podemos expressá-lo em termos de três campos reais A_μ^a (conforme o número de geradores de $SU(2)$), sendo $a = 1, 2, 3$. Assim, as transformações de campo são

$$\begin{cases} \varphi^i \rightarrow w\varphi^i \\ A_\mu \rightarrow wA_\mu w^\dagger + w\partial_\mu w^\dagger \end{cases} \quad (3.48)$$

sendo, $w(x) \in SU(2) \Rightarrow w(x) = \exp[\frac{i}{2}\varepsilon^a(x)\tau_a]$. Para uma transformação infinitesimal, ou seja, $w(x) \approx 1 + \frac{i}{2}\varepsilon^a(x)\tau_a$ teremos que,

$$A_\mu(x) \approx -\frac{ig}{2}\tau_a A_\mu^a \quad (3.49)$$

em que, g surge como constante de acoplamento de calibre e τ^a são geradores da álgebra $SU(2)$ representados pelas matrizes de Pauli,

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$[\tau^a, \tau^b] = 2i\epsilon_{abc}\tau^c, \quad \epsilon_{abc} = 1 \text{ Levi-Civita} \quad (3.51)$$

Analogamente, escrevemos o tensor de campo $F_{\mu\nu}(x)$ como,

$$F_{\mu\nu}(x) = -\frac{ig}{2}\tau_a F_{\mu\nu}^a \quad (3.52)$$

Portanto, para os cálculos que seguem, é conveniente utilizarmos a representação dos campos A_μ^a e do tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$, no formalismo Lagrangiano.

Deste modo, para o campo φ vamos escolher uma representação de um dubleto para nossos calculos,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

sendo, φ_1 e φ_2 campos escalares complexos.

Neste caso a densidade Lagrangiana tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi + \mu^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 \quad (3.54)$$

E a partir das relações (3.47), (3.49) e (3.52), podemos expandir o tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$ da seguinte maneira, enquanto a derivada covariante $D_\mu\varphi$ mantém sua estrutura e apenas realizamos a substituição (3.49),

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu\varphi = (\partial_\mu - \frac{ig}{2}\tau^a A_\mu^a)\varphi \end{cases} \quad (3.55)$$

Pode-se observar que na equação (3.55), a quantidade ϵ_{abc} surge como a constante de estrutura do grupo $SU(2)$ devido à comutação dos geradores τ^a .

Considerando uma transformação de *gauge* infinitesimal regida pelas seguintes equações,

$$\begin{cases} \varphi^i \rightarrow \varphi^i + \delta\varphi^i \\ \delta\varphi^i = \frac{i}{2}\tau_{aj}^i \epsilon^a(x)\varphi^j \\ A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a \\ \delta A_\mu^a = \epsilon_{abc}A_\mu^b \epsilon^c(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a(x) \end{cases} \quad (3.56)$$

Escrevendo a densidade Hamiltoniana por meio de uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu^a} \dot{A}_\mu^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^i} \dot{\varphi}^i - \mathcal{L}$$

assim podemos dizer que o funcional de energia do sistema físico em questão em função dos campos A_μ^a e φ é dado por

$$E = \int_{\text{all space}} d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}F_{0i}^a F^{a0i} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F^{aij} + (D_0\varphi)^\dagger D^0\varphi + (D_i\varphi)^\dagger D^i\varphi + V(\varphi^\dagger, \varphi) \right] \quad (3.57)$$

e como já observamos nas seções anteriores, temos uma liberdade na escolha do estado de mínima energia, portanto,

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^a = 0 \\ D_\mu\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(x) = w(x)\varphi_0 \\ \frac{\partial V}{\partial|\varphi|} = 0, \quad |\varphi|^2 = \varphi^\dagger\varphi = |\varphi_0|^2 \end{cases} \quad (3.58)$$

sendo assim, o campo A_μ^a um campo de *gauge* puro ($A_\mu^a = w\partial_\mu w^\dagger$) e $|\varphi_0|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$, calculada a partir da minimização do potencial $V(\varphi^\dagger, \varphi)$. Pois bem, dentre esta família de configurações de energia mínima, escolheremos:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= 0 \\ \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora, nosso próximo passo é demonstrar que qualquer configuração próxima a φ_0 pode ser escrita como:

$$\varphi(x) = \frac{w(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi(x) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

sendo, $\chi(x)$ uma função real e $w(x)$ uma função com valores em $SU(2)$, para $w(x)$ próximo a identidade, teremos:

$$w(x) = 1 + i\tau^a S_a(x) \quad (3.61)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + iS_3 & iS_1 + S_2 \\ iS_1 - S_2 & 1 - iS_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Considerando apenas os termos lineares, uma vez que S_a e χ são pequenos, ($S_a\chi \sim 0$) temos,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}S_1 + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}S_2 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi - i\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}S_3 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Portanto, qualquer configuração próxima da configuração de energia mínima é equivalente à configuração $\varphi(x)$ abaixo.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi(x) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

pois essas estão conectadas por uma transformação de calibre.

Conseqüentemente, podemos determinar a estrutura das configurações próximas da configuração de energia mínima de forma simples, assumindo que o campo A_μ^a é pequeno, de

maneira perturbativa,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ &\simeq \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a = \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \end{aligned} \quad (3.65)$$

e que o campo $\varphi(x)$ tem a forma (3.64), assim

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}\tau_a A_\mu^a\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \chi(x) \end{pmatrix} \\ &\simeq \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ig\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}A_\mu^1 - g\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}A_\mu^2 \\ 2\partial_\mu\chi + ig\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}A_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

e a menos de uma constante, o potencial será

$$V = \mu^2\chi^2 \quad (3.67)$$

Sendo assim, como resultado (3.65), (3.66) e (3.67) a Lagrangiana em termos quadraticos será

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^a\mathcal{F}^{a\mu\nu} + \frac{g^2\mu^2}{8\lambda}A_\mu^a A^{a\mu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \mu^2\chi^2 \quad (3.68)$$

Portanto, em virtude do mecanismo de Higgs, o modelo apresenta três campos vetoriais massivos A_μ^a ($a = 1, 2, 3$), com massa $m \approx \frac{g\mu}{2\sqrt{2}\lambda}$, além de um campo escalar massivo χ (campo do bóson de Higgs), com massa $m_\chi \approx \mu\sqrt{2}$, como já aviamos visto nas seções anteriores.

4 Teoria da interação eletrofraca e os campos vetoriais mensageiros da interação

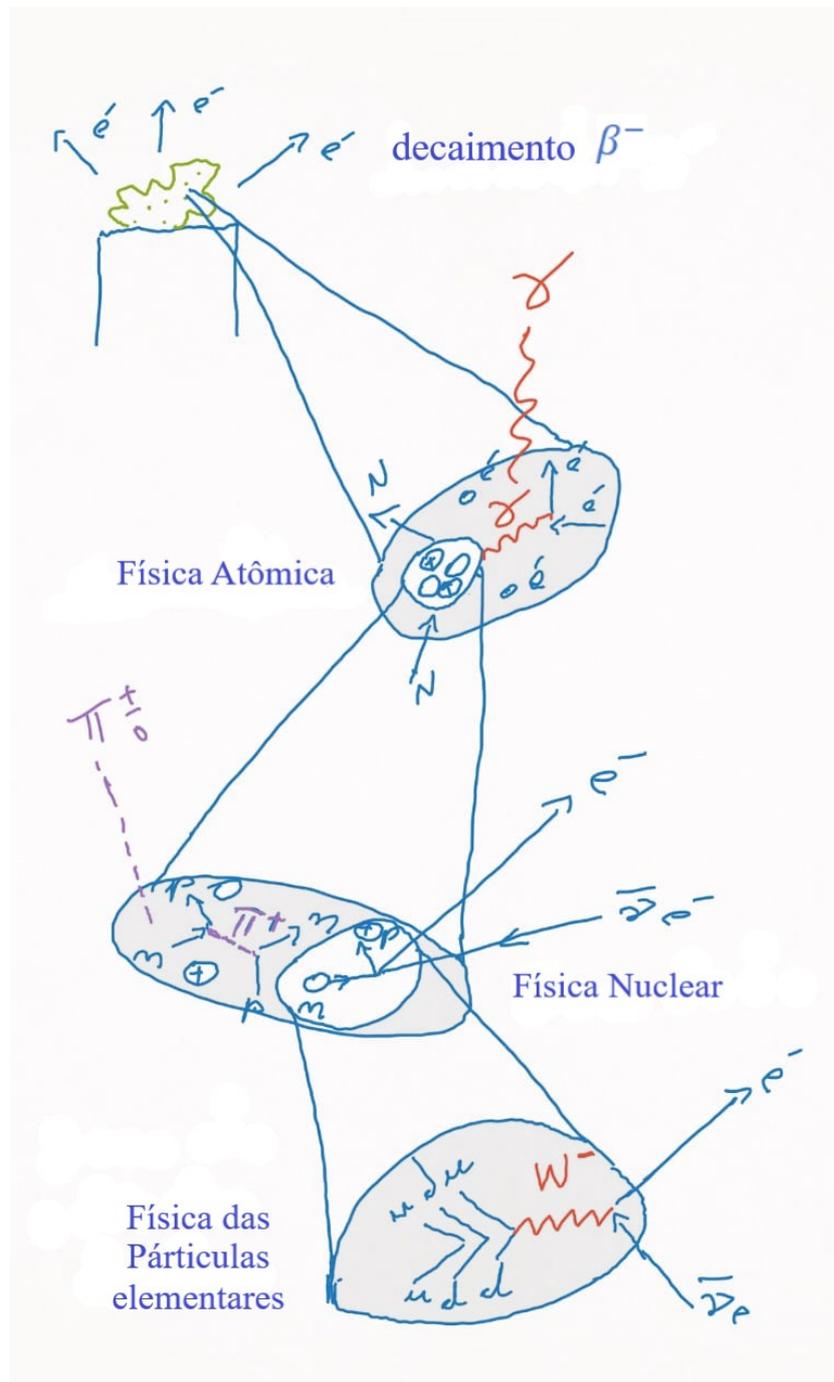


Figura 4: Um mergulho nas escalas de energia e arquitetura da realidade tendo em mente um decaimento β^-

4.1 O modelo de Fermi e as partículas mensageiras de Leite Lopez

Em 1958 Leite em sua estadia no Caltech (California Institute of Technology), e aproveitando a presença de Feynman no instituto e sua teoria V-A com Gell-Mann da interação fraca, formulou sua teoria eletrofraca com a predição da massa da partícula mensageira carregada W^\pm proposta por Benjamin O. Klein muito próximo do valor atual e também previu a existência de uma partícula mensageira neutra Z. Tudo isso supondo que a constante de acoplamento eletromagnética (carga elétrica e) com a matéria seja próxima ou mesmo igual a constante de acoplamento das partículas fracas com a matéria (carga fraca g). Argumentos à frente de seu tempo e formalizados junto com trabalhos de outros cientistas (Schwinger, Glashow, Salam etc) no artigo nobel de Steven Weinberg em 1967. Logo abaixo exploramos com detalhes dessa passagem.

Observando que o decaimento beta negativo (radiação β^- , elétrons)

$$\begin{aligned} {}^A_Z\mathbf{X} &\rightarrow {}^A_{Z+1}\mathbf{X}' + e^- + \bar{\nu}_e \\ n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned} \quad (4.1)$$

ocorre na natureza com a atuação de 4 partículas fermiônicas (nêutron, próton, elétron e neutrino) Fermi propôs a seguinte densidade de Lagrangiana para descrever essa reação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Fermi} &= \mathcal{L}_{barions} + \mathcal{L}_{leptons} + \mathcal{L}_{int} \\ \mathcal{L}_{barions} &= \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - [M])\psi_b, \quad \psi_b = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{leptons} &= \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu\partial_\mu - [m])\psi_l, \quad \psi_l = \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{int} &= G(\bar{p}\gamma^\mu n)(\bar{e}\gamma_\mu\nu_e), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde temos conservações do número bariônico, leptônico e carga elétrica advindas de uma simetria de calibre global e também a constante G de Fermi especificando a intensidade da interação. Observe que $[M]$ e $[m]$ são matrizes diagonais com as respectivas massa das partículas.

Agora inspirado no trabalho de O. Klein em que temos uma interação tipo Proca-Yukawa, com campos vetoriais massivos e carregados intermediando a interação fraca, Leite Lopes propõe a seguinte densidade de Lagrangiana para descrever o decaimento beta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LLopez} = & W_\mu^+(\eta^{\mu\nu}\square + m_W^2)W_\nu^- + \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - [M])\psi_b + \\
& + \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu\partial_\mu - [m])\psi_l - g[(\bar{p}\gamma^\mu n) + (\bar{e}\gamma^\mu\nu_e)]W_\mu^-
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde a interação é dada por acoplamento corrente-campo usual em Física Nuclear na descrição da interação entre bárions via troca de mésons ou mesmo eletromagnetismo e a interação entre elétrons via troca de fótons. Observe que $W^+ = W^{-*}$, tendo assim uma densidade de Lagrangiana com simetria $U(1)$ global e conservação da carga elétrica. É tentador pensar que a massa da partícula W^\pm pode ser gerada por um mecanismo de Stueckelberg onde mantemos a simetria de calibre $U(1)$ local

$$\begin{aligned}
W_\mu^+(\eta^{\mu\nu}\square + m_W^2)W_\nu^- & \rightarrow W_\mu^+(\eta^{\mu\nu}\square - G^{\mu\nu})W_\nu^- + \\
& + m_W^2(W_\mu^+ - \frac{1}{m_W^2}B_\mu^+)\eta^{\mu\nu}(W_\mu^- - \frac{1}{m_W^2}B_\mu^-) \\
G^{\mu\nu} & = \partial_\mu\partial_\nu \\
W_\mu^- & = W_\mu^- + \partial_\mu\alpha(x) \\
B_\mu^- & = B_\mu^- + m_W\partial_\mu\alpha(x).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicando o princípio da mínima ação de Hamilton ($S = \int d^4x\mathcal{L}_{LLopez}$) temos a seguinte equação de movimento para a partícula W^-

$$\delta S = 0 \Rightarrow (\square + m_W^2)W_\mu^- = g[(\bar{p}\gamma_\mu n) + (\bar{e}\gamma_\mu\nu_e)] \tag{4.5}$$

cuja solução de Green é dada pela equação abaixo

$$\begin{aligned}
W_\mu^-(x) & = \int d^4y D_{\mu\nu}(x, y)g[(\bar{p}\gamma_\nu n) + (\bar{e}\gamma_\nu\nu_e)](y), \\
D_{\mu\nu}(x, y) & = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[ip(x - y)]\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

No regime de pouco momento transferido ($p^2 \ll m_W^2$) devido a uma partícula com massa grande concluímos que

$$W_\mu^-(x) = \frac{g}{m_W^2}[(\bar{p}\gamma_\mu n) + (\bar{e}\gamma_\mu\nu_e)](x) \tag{4.7}$$

pois

$$\int d^4p \exp[ip(x - y)] = (2\pi)^4 \delta^4(x - y). \quad (4.8)$$

Logo efetivamente geramos uma interação tipo corrente-corrente recuperando o modelo de Fermi

$$-g[(\bar{p}\gamma^\mu n) + (\bar{e}\gamma^\mu \nu_e)]W_\mu^- = \frac{g^2}{m_W^2} [(\bar{p}\gamma^\mu n) + (\bar{e}\gamma^\mu \nu_e)]^2. \quad (4.9)$$

Ao compararmos a interação de Fermi com a interação efetiva de Leite Lopez

$$G = \frac{g^2}{m_W^2}, \quad \frac{g^2}{e^2 m_W^2} \sim 10^{-4} \frac{1}{[\frac{GeV}{c^2}]^2}, \quad (4.10)$$

se supormos que $g = e$ a massa do bóson mediador da interação seria $m_W = 100 \frac{MeV}{c^2}$. O argumento de Leite Lopez pode ser apresentado em termos dos diagramas de Stüeckelberg-Feynman vide Fig. 5.

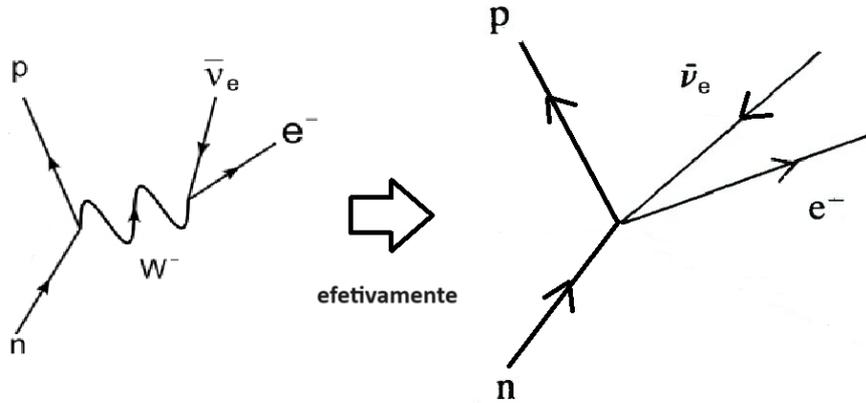


Figura 5: Decaimento Beta descrito pelo bóson de Leite Lopez

Leite Lopez também propõe em seu trabalho a possibilidade de existir uma partícula mensageira neutra, ideia que será explorada a seguir por cientistas contemporâneos do mesmo.

4.2 Incluindo a partícula mensageira neutra e o fóton via simetria $SU(2) \otimes U(1)$ de Bludman-Glashow

Agora tendo em mente a teoria de Heisenberg-Tamm para a interação forte em Física Nuclear em que um tripleto de partículas escalares estariam sendo trocadas por um duplete de férmions respeitando a simetria $SU(2)$ global, poderíamos utilizar a mesma ideia

e ampliar o modelo de Leite Lopez apresentado anteriormente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LLopez} = & \frac{1}{2}\vec{A}_\mu^\dagger(\eta^{\mu\nu}\square + [m_A^2])\vec{A}_\nu + \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - [M])\psi_b + \\ & + \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu\partial_\mu - [m])\psi_l - g[\bar{\psi}_b\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_b + \bar{\psi}_l\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_l]\vec{A}_\mu\end{aligned}\quad (4.11)$$

em que $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ é dado pelas matrizes de Pauli e temos 3 partículas vetoriais massivas sendo trocadas $\vec{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$. De maneira explícita no setor bariônico temos que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_b\gamma^\mu\tau^1\psi_b A_\mu^1 &= \bar{p}\gamma^\mu n A_\mu^1 + \bar{n}\gamma^\mu p A_\mu^1 \\ \bar{\psi}_b\gamma^\mu\tau^2\psi_b A_\mu^2 &= i\bar{p}\gamma^\mu n A_\mu^2 - i\bar{n}\gamma^\mu p A_\mu^2 \\ \bar{\psi}_b\gamma^\mu\tau^3\psi_b A_\mu^3 &= \bar{p}\gamma^\mu p A_\mu^3 - \bar{n}\gamma^\mu n A_\mu^3\end{aligned}\quad (4.12)$$

e dessa forma

$$\bar{\psi}_b\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_b\vec{A}_\mu = \bar{p}\gamma^\mu n[A_\mu^1 + iA_\mu^2] + \bar{n}\gamma^\mu p[A_\mu^1 - iA_\mu^2] + \bar{p}\gamma^\mu p A_\mu^3 - \bar{n}\gamma^\mu n A_\mu^3, \quad (4.13)$$

sendo possível reconhecer os campos vetoriais carregados W^\pm e prevemos a existência de um bóson vetorial neutro Z^0

$$\begin{aligned}W^\pm &= A_\mu^1 \pm iA_\mu^2 \\ Z^0 &= A_\mu^3.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Podemos fazer o mesmo para o setor de leptons trocando os prótons por elétrons e neutrons por neutrinos. Explicitamente a densidade de Lagrangiana de Leite Lopez é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LLopez} = & W_\mu^+(\eta^{\mu\nu}\square + m_W^2)W_\nu^- + \frac{1}{2}Z_\mu^0(\eta^{\mu\nu}\square + m_Z^2)Z_\nu^0 + \\ & \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - [M])\psi_b + \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu\partial_\mu - [m])\psi_l + \\ & -g[\bar{p}\gamma^\mu n W_\mu^+ + \bar{n}\gamma^\mu p W_\mu^- + \bar{p}\gamma^\mu p Z_\mu^0 - \bar{n}\gamma^\mu n Z_\mu^0] +\end{aligned}$$

$$-g[\bar{e}\gamma^\mu\nu_e W_\mu^+ + \bar{\nu}_e\gamma^\mu e W_\mu^- + \bar{e}\gamma^\mu e Z_\mu^0 - \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e Z_\mu^0] \quad (4.15)$$

Ao final podemos representar essas interações e vértices novamente por diagramas de Stüeckelberg-Feynman por meio da Fig. 6.

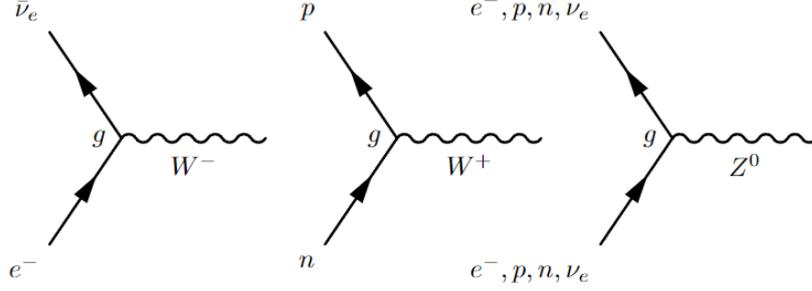


Figura 6: Vértices propostos implícitamente no trabalho de Leite Lopez

Podemos também incluir os fótons A_μ via simetria de calibre $U(1)$ local e o conceito de derivada covariante D_μ

$$\begin{aligned} W_\mu^+(\eta^{\mu\nu}\square)W_\nu^- &\rightarrow -D_\nu W_\mu^+ D^\nu W^{-\mu} = -(\partial_\nu + ieA_\nu)W_\mu^+(\partial^\nu - ieA^\nu)W^{-\mu}, \\ \bar{\psi}_b i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_b &\rightarrow \bar{\psi}_b i\gamma^\mu D_\mu \psi_b = \bar{\psi}_b i\gamma^\mu (\partial_\mu + i[q]_b A_\mu) \psi_b, \quad \frac{[q]_b}{e} = [\tau^3] + \frac{1}{2}[B], \\ \bar{\psi}_l i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_l &\rightarrow \bar{\psi}_l i\gamma^\mu D_\mu \psi_l = \bar{\psi}_l i\gamma^\mu (\partial_\mu - i[q]_l A_\mu) \psi_l, \quad \frac{[q]_l}{e} = [\tau^3] + \frac{1}{2}[L]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que τ^3 é uma das matrizes de Pauli, B é um operador associado a conservação do número bariônico e L é um operador associado a conservação do número leptônico. No presente caso $[B]=[L]=I$ (matriz identidade) e sendo assim apenas o próton e o elétron acoplam com o fóton (partículas carregadas). Portanto, finalizamos com a densidade de Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LLopez} &= -(\partial_\nu + ieA_\nu)W_\mu^+(\partial^\nu - ieA^\nu)W^{-\mu} + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}Z_\mu^0(\eta^{\mu\nu}\square + m_Z^2)Z_\nu^0 + \\ &- \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_b(\partial_\mu + i[q]_b A_\mu - [M])\psi_b + \bar{\psi}_l(\partial_\mu + i[q]_l A_\mu - [m])\psi_l + \\ &-g[\bar{p}\gamma^\mu n W_\mu^+ + \bar{n}\gamma^\mu p W_\mu^- + \bar{p}\gamma^\mu p Z_\mu^0 - \bar{n}\gamma^\mu n Z_\mu^0] + \\ &-g[\bar{e}\gamma^\mu\nu_e W_\mu^+ + \bar{\nu}_e\gamma^\mu e W_\mu^- + \bar{e}\gamma^\mu e Z_\mu^0 - \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e Z_\mu^0] \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e poderíamos também ter acoplamento do tipo $F^{\mu\nu}W_\mu^+W_\nu^-$ que preserva a simetria de calibre $U(1)$ global e local. Representamos as interações dos fótons nos diagramas de Stüeckelberg-Feynman da Fig. 7.

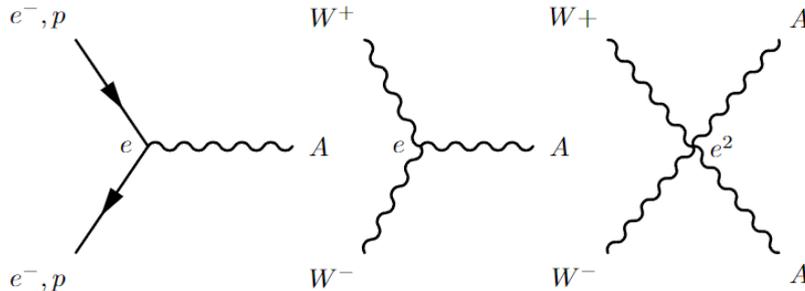


Figura 7: Vértice de interação entre as partículas do modelo investigado e o fóton

Nessa primeira tentativa de unificação da interação eletromagnética com a interação eletrofraca investigamos uma simetria $[SU(2)$ global] \otimes $[U(1)$ local] e algumas possibilidades e questões surgem nos seguintes pontos: Poderíamos implementar no modelo estendido de Leite Lopez um acoplamento corrente-campo vetorial-axial $g[C_V\bar{\psi}_b\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_b - C_A\bar{\psi}_b\gamma_5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_b + \bar{\psi}_l(1 - \gamma_5)\gamma^\mu\vec{\tau}\psi_l]\vec{A}_\mu$ com a ajuda da matriz γ_5 e recuperando a teoria V-A de Feynman-Gell-Mann a baixas energias? Poderíamos estender a simetria estudada para $[SU(2)$ local] \otimes $[U(1)$ local] seguindo Sheldon Glashow e tendo em vista os auto-acoplamentos triplos e quárticos da Fig. 7 típicos de uma simetria de calibre não abeliana local? A relação entre a constante eletrofraca g e a carga elétrica e está realmente correta? Tendo em vista o conceito de quebra espontânea de simetria de Higgs, as massas desse modelo poderiam ser geradas por algum mecanismo?

A resposta para essas inquietações serão dadas no próximo capítulo.

4.3 O modelo de Leptons de Salam-Weinberg

É de nosso conhecimento que léptons interagem com fótons e com bósons vetoriais os quais presumimos serem os mediadores da interação eletromagnética (γ) e fraca (Z^0, W^\pm) respectivamente. Poderíamos nos perguntar qual seria a estrutura teórica que unifica estes dois tipos de interação tendo em vista a massa dos mediadores e os acoplamentos.

A idéia de síntese das interações se resume em imaginar uma teoria com um simetria exata a qual será quebrada na escolha do vácuo. Observando o sucesso em descrever fenômenos da natureza no presente caso a simetria em questão é uma simetria de calibre local

$$SU_L(2) \otimes U_Y(1) \text{ (isospin + hipercarga)} \quad (4.18)$$

porém a lagrangiana proveniente contém alguns ingredientes a mais necessários para embutir um mecanismo de quebra capaz de abarcar a posteriori as massas e os acoplamentos

associados a descrição da interação eletromagnética e fraca entre os léptons,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{calibre} + \mathcal{L}_{leptons} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{Higgs} \quad (4.19)$$

onde os termos acima serem explicitados na continuação da leitura.

Assim, queremos escrever a lagrangiana completa para a teoria que possui a invariância de calibre local $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ e faremos isso em várias etapas.

Considerando a discussão no capítulo 3, primeiramente escrevemos o termo de calibre associado aos mediadores da interação exata,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{calibre} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \quad a = 1, 2, 3. \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon_{abc}A^b_\nu A^c_\mu \\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (4.20)$$

sendo o primeiro termo da Lagrangiana associado aos tensores de campo não-abelianos ($SU(2)$), e o segundo termo associado aos tensores de campo abeliano ($U(1)$).

Em seguida, temos o termo cinético dos léptons, onde, para simplificar os cálculos, consideraremos apenas a primeira família de léptons, ou seja, o elétron (e) e seu neutrino (ν_e). Sabemos que o campo do elétron pode ser decomposto em uma parte *left* (mão esquerda) e outra parte *right* (mão direita), enquanto o neutrino é experimentalmente conhecido por ser puramente *left*. Podemos, então, escolher a representação dos campos *left* como dubletos de $SU(2)$, enquanto os campos *right* como singletos de $SU(2)$ (não há neutrinos). Assim,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, e_R$$

logo, podemos definir as projeções *left* e *right* do campo espinor como

$$\psi = L + R \rightarrow \begin{cases} L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\ R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) e \end{cases} \quad (4.21)$$

pois com a definição $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, temos que o anticomutador $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ e também $\gamma_5^2 = 1$, resultados assegurados pela álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Neste caso temos os projetores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ e percebemos que a equação de Dirac livre e não massiva possui a seguinte simetria quiral

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (4.22)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp[i\alpha\gamma_5]\psi$$

Portanto, o termo cinético da Lagrangiana dos léptons é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{leptons} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \\ &= i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu^L L + i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu^R R \\ &= i\bar{L}\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}ig\tau^a A_\mu^a + \frac{1}{2}ig'B_\mu)L + i\bar{R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)R \end{aligned} \quad (4.23)$$

sendo g e g' as constantes de acoplamento de calibre independentes, associadas respectivamente aos grupos $SU(2)$ e $U(1)$.

O termo de Yukawa será importante para gerar massa para o elétron mantendo o neutrino sem massa. Ele acopla o campo escalar complexo de Higgs com o dubleto de leptons e o singleto de mão direita,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} &= -\lambda_e(\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

em que, λ_e denota o acoplamento de Yukawa.

E por fim o ingrediente essencial,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= \left| (\partial_\mu - \frac{1}{2}ig\tau^a A_\mu^a - \frac{1}{2}ig'B_\mu)\Phi \right|^2 + V(\Phi^\dagger\Phi) \\ V(\Phi^\dagger\Phi) &= -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Agora vamos aplicar os conceitos envolvendo teorias de calibre com quebra espontânea de simetria. Observe que os campos de matéria se transformam na representação fundamental do Grupo(dubletos de isospin+hipercarga),

(leptons de mão esquerda)

$$\begin{aligned} L_\mu^i &\rightarrow L_\mu^i + \delta L_\mu^i \\ \delta L_\mu^i &= i(\frac{1}{2}\tau_j^{ai}\alpha^a(x) + \frac{1}{2}\beta_L(x)\delta_j^i)L^j \end{aligned} \quad (4.26)$$

(bóson de Higgs)

$$\Phi^i \rightarrow \Phi^i + \delta\Phi^i$$

$$\delta\Phi^i = i\left(\frac{1}{2}\tau_j^{ai}\alpha^a(x) + \frac{1}{2}\beta_\Phi(x)\delta_j^i\right)\Phi^j \quad (4.27)$$

Porém os elétrons de mão direita se transformam como(singlete de isospin+hipercarga)

$$R \rightarrow R + i\beta_R(x)R \quad (4.28)$$

E por fim os campos de calibre na representação adjunta do Grupo(tripletos de isospin+hipercarga),

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a \\ \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + \epsilon_{abc} \alpha^b(x) A_\mu^c \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \left[-\frac{1}{2}\beta_L(x) + \frac{1}{2}\beta_\Phi(x) - \frac{1}{2}\beta_R(x) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Uma transformação de calibre global perante a atuação do grupo $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ tem a seguinte representação fundamental,

$$U = \exp \left[\frac{1}{2} i\tau^a \alpha^a + \frac{1}{2} i\beta \right] \quad (4.30)$$

sendo, τ^a ($a = 1, 2, 3$) as matrizes de Pauli.

Como bem sabemos se o campo de Higgs adquire um valor esperado no vácuo da forma

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.31)$$

temos apenas uma transformação global que deixa o vácuo ou estado de mínima energia invariante, qual seja,

$$\begin{aligned} U &= \exp \left[i\tau^3 \alpha^3 + \frac{1}{2} i\beta \right], \quad \alpha^3 = \beta \\ &= \exp \left[i\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

e sendo assim ao reescrevermos os campos em torno da configuração de mínima energia a teoria vai ter um boson de calibre sem massa correspondente a combinação de geradores acima e os 3 campos de calibre remanescentes vão adquirir massa.

$$SU_L(2) \otimes U_Y(1) \xrightarrow{\text{quebra}} U(1)_e \quad (4.33)$$

Vamos então trabalhar os detalhes do espectro de massa obtido pelo mecanismo de Higgs. O primeiro setor da lagrangiana a se averiguar as consequencias é aquele o qual

da massa para os bosons vetorias,

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(g\tau^a A^a_\mu + \frac{1}{2}g'B_\mu \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \left[g^2(A^1_\mu)^2 + g^2(A^2_\mu)^2 + (-gA^3_\mu + g'B_\mu)^2 \right]\end{aligned}\quad (4.34)$$

Podemos então observar o surgimento dos seguintes campos vetorias

$$\begin{aligned}W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu \mp iA^2_\mu) \\ Z^0_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA^3_\mu - g'B_\mu)\end{aligned}\quad (4.35)$$

e também um quarto campo vetorial ortogonal ao Z^0 e sem massa(campo eletromagnético),

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA^3_\mu + g'B_\mu)\quad (4.36)$$

Portanto

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{v^2}{8}g^2W^+_\mu W^{+\mu} + \frac{v^2}{8}g^2W^-_\mu W^{-\mu} + \frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2)Z^0_\mu Z^{0\mu}\quad (4.37)$$

onde podemos definir as massas dos campos vetorias tendo em vista os termos de Proca,

$$m_W = g\frac{v}{2} \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2} \quad m_A = 0\quad (4.38)$$

Para simplificar a análise podemos definir um ângulo de mistura ou ângulo de Weinberg-Salam, associado a mudança de base

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\text{sen}\theta_w \\ \text{sen}\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix}\quad (4.39)$$

onde

$$\cos\theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{sen}\theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\quad (4.40)$$

Observe que

$$\begin{aligned}m_W &= m_Z \cos\theta_w \\ g \text{sen}\theta_w &= g' \cos\theta_w\end{aligned}\quad (4.41)$$

Os campos os quais iniciei os estudo(A^a_μ, B_μ) são ditos auto-estados da simetria e os campos vetorias definidos anteriormente($Z^0_\mu, W^\pm_\mu, A_\mu$) são ditos auto-estados da massa. O próximo passo é reescrever a lagrangiana em termos dos auto-estados da massa.

Invertendo as equação,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^+ \\ W^- \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Considere o termo cinético dos léptons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{leptons} &= \bar{R}\gamma^\mu i(\partial_\mu + ig'B_\mu)R + \bar{L}\gamma^\mu i(\partial_\mu - ig\tau^a A^a_\mu + \frac{1}{2}ig'B_\mu)L \\ &= \dots + \bar{R}\gamma^\mu i(+ig'B_\mu)R + \bar{L}\gamma^\mu i(-ig\tau^3 A^3_\mu + \frac{1}{2}ig'B_\mu)L \\ &= \dots + \bar{R}\gamma^\mu i(+ig'\cos\theta_w)RA_\mu + \bar{L}\gamma^\mu i(-ig\sin\theta_w\tau^3 + \frac{1}{2}ig'\cos\theta_w)LA_\mu \\ &= \dots + ig\sin\theta_w\bar{R}\gamma^\mu iRA_\mu + ig\sin\theta_w\bar{L}\gamma^\mu i(-\tau^3 + \frac{1}{2})LA_\mu \\ &= \dots - g\sin\theta_w\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e A_\mu \end{aligned} \quad (4.43)$$

e de imediato podemos identificar a carga elétrica como sendo

$$e = g\sin\theta_w \text{ ou } e = g' \cos\theta_w \quad (4.44)$$

Por fim vou explicitar a massa do elétron,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_{Yukawa} &= -\lambda_e \left[\bar{L}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} R + \bar{R}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} L \right] \\ m_e &= \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} v \end{aligned} \quad (4.45)$$

De maneira natural poderíamos estender as idéias exploradas no texto para abarcar o conjunto de partículas conhecido na natureza. O conceito que se utiliza é de organizar as partículas elementares em famílias. Cada família obedece a mesma estrutura matemática explorada anteriormente no caso dos léptons $(e, \nu_e)_L$. Por exemplo a primeira família é composta pelo dubleto de léptons $(e, \nu)_L$ mais um dubleto de quarks de sabor $(u, d)_L$. A segunda família é composta pelo dubleto de léptons $(\mu, \nu_\mu)_L$ mais um dubleto de quarks de sabor $(c, s)_L$. E a terceira família é composta pelo dubleto de léptons $(\tau, \nu_\tau)_L$ mais um dubleto de quarks de sabor $(b, t)_L$. Voltaremos nessa discussão posteriormente.

Agora ao incluírmos os quarks up e down de forma análoga ao setor dos léptons na eq. (4.23) podemos investigar o limite de baixas energias do decaimento beta negativo de forma análoga ao argumento de Leite Lopez anteriormente agrupando termos que acoplam com o bóson vetorial carregado (corrente-campo)

$$\begin{aligned}
i\bar{L}\gamma^\mu\left(\frac{1}{2}ig\tau^a A_\mu^a + \frac{1}{2}ig'B_\mu\right)L &\rightarrow -\frac{g}{4}[\bar{u}(1-\gamma_5)\gamma^\mu d + \bar{e}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\nu_e][A_\mu^1 + iA_\mu^2] = \\
&= g_W[\bar{u}(1-\gamma_5)\gamma^\mu d + \bar{e}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\nu_e]W_\mu^- = J_W^\mu W_\mu^-, \quad g_W = -\frac{\sqrt{2}}{4}g.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Representamos os acoplamentos $J_W^\mu W_\mu^-$ pelos diagramas de Stüeckelberg-Feynman abaixo na Fig. 8.

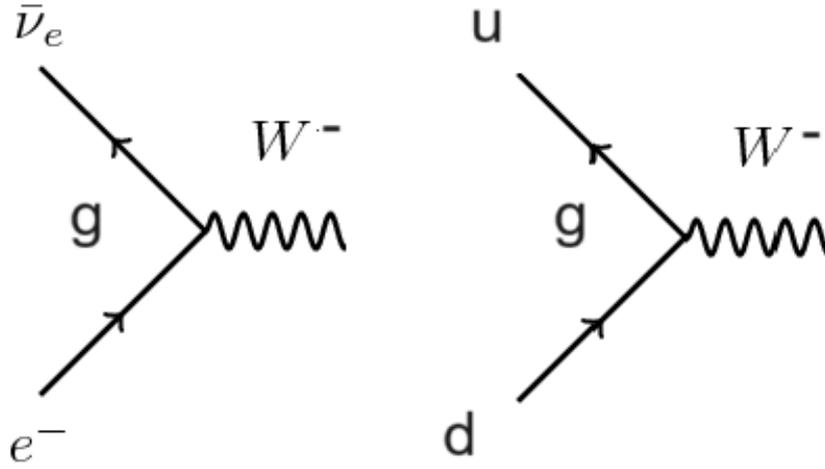


Figura 8: Vértices de interação do bóson vetorial W^- com léptons e quarks

e investigando o regime de baixos momentos transferidos (m_W , grande) geramos uma interação efetiva corrente-corrente

$$J_W^\mu W_\mu^- \rightarrow J_W^\mu J_{W\mu} = \frac{g^2}{8m_W^2}[\bar{u}(1-\gamma_5)\gamma^\mu d + \bar{e}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\nu_e]^2, \tag{4.47}$$

recuperando a teoria V-A de Feynman e Gell-Mann. No modelo de S. Weinberg o decaimento beta negativo é representado no diagrama abaixo da Fig. 9 via união dos vértices de interação do bóson vetorial carregado W^- esboçados anteriormente.

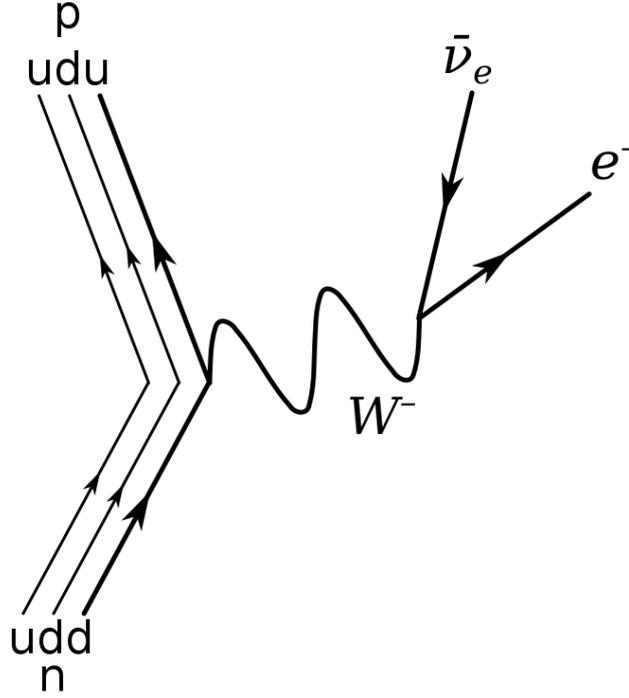


Figura 9: Decaimento beta negativo tendo em vista o modelo de S. Weinberg

Sendo assim, ao compararmos com o valor da constante de Fermi G advinda do setor vetorial

$$G = \frac{g^2}{8e^2 m_W^2} \sim 10^{-4} \frac{1}{[\frac{MeV}{c^2}]^2} \quad (4.48)$$

e levando em conta que $e = g \sin \theta_w$ concluímos que

$$m_W \sin \theta_w = 35,3$$

$$m_W = m_Z \cos \theta_w. \quad (4.49)$$

Percebemos que temos 3 variáveis (m_W , m_Z e θ_w) e 2 equações. Sendo assim, precisamos explorar o setor intermediado pela partícula vetorial neutra Z_0 . Para o setor envolvendo o dubleto $(e, \nu_e)_L$ juntamente com a primeira família de quarks $(u, d)_L$

$$i\bar{L}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2}ig\tau^3 A_\mu^3 + \frac{1}{2}ig'B_\mu \right) L + i\bar{R}\gamma^\mu (ig'B_\mu) R \quad (4.50)$$

percebemos a seguinte estrutura

$$g_Z[\bar{l}(C_V^l - C_A^l \gamma_5)\gamma^\mu l + \bar{\nu}_l(C_V^\nu - C_A^\nu \gamma_5)\gamma^\mu \nu_l + \bar{q}(C_V^q - C_A^q \gamma_5)\gamma^\mu q]Z_{0\mu} = J_Z^\mu Z_{0\mu} \quad (4.51)$$

onde na notação proposta l representa os elétrons ou muons e q respresenta os quarks up ou down. Representamos os acoplamentos $J_Z^\mu Z_{0\mu}$ pelos diagramas da Fig. 10.

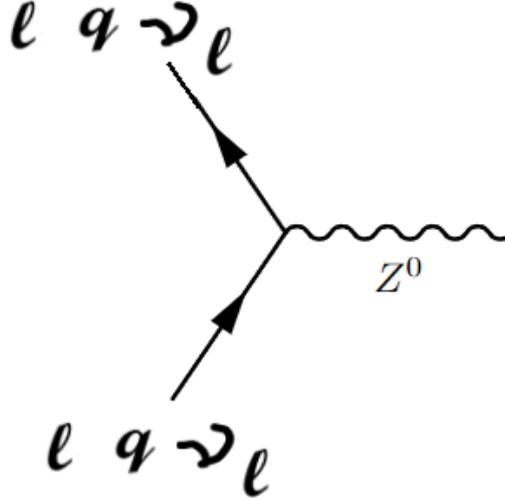


Figura 10: Vértices de acoplamento entre o Z_0 e a matéria leptônica e quarkônica

Observe que g_Z é uma função das variáveis (g, θ_w) e todas as constantes de acoplamento vetoriais-axiais (C_V e C_A) são números ou podem ser escritas como funções do ângulo de mistura de Weinberg θ_w . Neste caso se medirmos, igual no experimento Gargamelle (onde as correntes neutras foram encontradas), as taxas de ramificações dos seguintes processos de espalhamento

$$\frac{\sigma(e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e)}{\sigma(e^- + \nu_\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu)} \quad \frac{\sigma(q + \nu_e \rightarrow q + \nu_e)}{\sigma(q + \nu_\mu \rightarrow q + \nu_\mu)} \quad (4.52)$$

onde σ representam as secções de choque dos espalhamentos e a matéria quarkônica está dentro dos núcleons (prótons e neutrons) perceberíamos que essas taxas, advindas de uma estrutura corrente-corrente neutra $(\frac{g_Z^2}{m_Z} J_Z^\mu J_{Z\mu})$, só dependeriam do ângulo de mistura de Weinberg θ_w , sendo possível medi-lo $\theta_w \sim 29^\circ$ e conseqüentemente

$$m_W \sim 80,69 \frac{MeV}{c^2},$$

$$m_Z \sim 89,85 \frac{MeV}{c^2}. \quad (4.53)$$

Uma outra maneira de fixar os parâmetros (m_W, m_Z, θ_w) seria estudando o decaimento do Z_0 (partícula pai) em um par de partícula-antipartícula (partículas filhas) tendo em vista o vértice da Fig. 10 e utilizando apenas conceitos envolvendo apenas cinemática relativística, bastando apenas medir o momento de uma das partículas filhas. Dado o decaimento ($Z \rightarrow l + \bar{l}$) e investigando o mesmo no referencial da partícula (Z) escrevemos as equações associadas a conservação de energia e momento $p^\mu = (E, \vec{p}) = (m_Z, \vec{0})$

$$\begin{aligned} p^\mu &= (p_1^\mu + p_2^\mu) \\ p_2^\mu p_{2\mu} &= (p - p_2)^\mu (p - p_2)_\mu = m_l^2 \\ m_Z^2 - 2m_Z E_2 + m_l^2 &= m_l^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

somos levados ao resultados

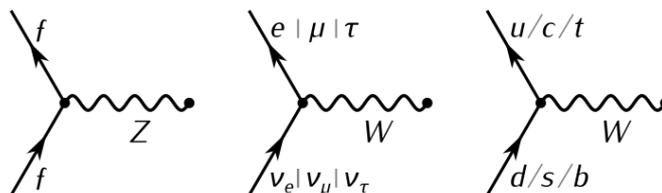
$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = \frac{m_Z}{2} \\ p_1 &= -p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_l^2} = \frac{\sqrt{m_Z^2 - 4m_l^2}}{2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

percebemos não apenas a restrição cinemática $m_Z \geq 2m_l$ mas também considerando a massa do Z_0 grande, encontramos a mesma pelos dados do LHC-CERN devido aos experimentos de colisões no ATLAS [48]

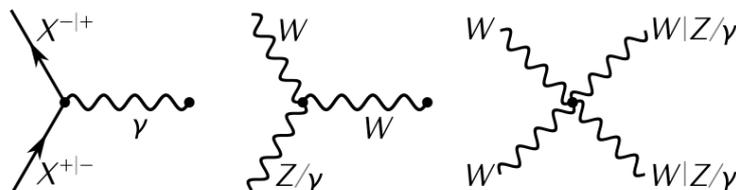
$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_Z}{2} \sim 45 \frac{MeV}{c^2} \\ \frac{m_Z}{2} \text{sen}(2\theta_w) &\sim 35,3 \Rightarrow \theta_w \sim 28,7^\circ. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Finalizamos então a investigação do setor eletrofraco com os vértices do modelo de S. Weinberg, vistos na Fig. 11.

vértices do setor fraco



vértices do setor eletromagnético e eletrofraco



vértices do setor do Higgs



Figura 11: Vértices de acoplamento entre as partículas no modelo eletrofraco de S. Weinberg

Com a ajuda dos vértices do modelo de léptons na Fig. 11, poderíamos também explicitar os processos que contribuem para o decaimento do Higgs, vistos na Fig. 12, e dessa forma determinar a massa dessa partícula como sendo $m_h \sim 125 \frac{GeV}{c^2}$.

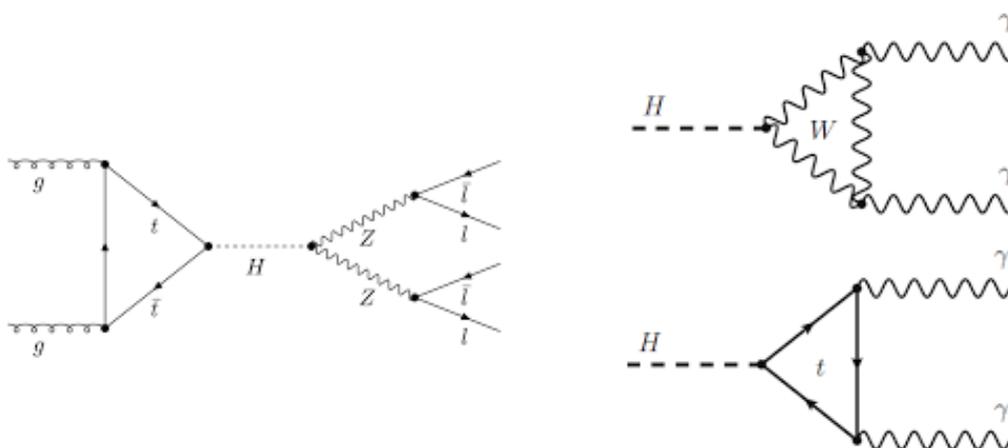


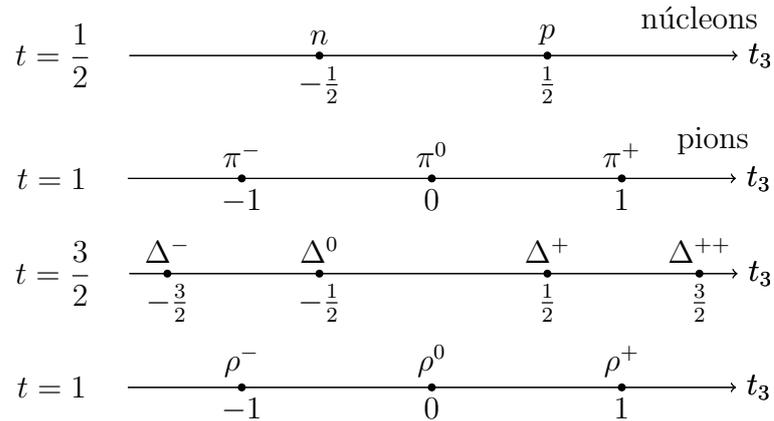
Figura 12: Decaimento do Higgs em 4 léptons e 2 fótons

4.4 A hipótese dos quarks com sabores e cores e a construção do Modelo Padrão

Vamos agora investigar com mais detalhes e esmiuçar a ideia e possibilidade de algumas das partículas que descrevem a matéria ou mesmo a radiação terem uma subestrutura e serem compostas por fragmentos mais elementares e indivisíveis. Essas partículas elementares serão os blocos construtores de toda a realidade. Como sabemos, o universo físico é descrito pela interação entre matéria e radiação. No setor da radiação temos fótons da interação eletromagnética, bósons vetoriais da interação fraca e gluons da interação forte. No setor da matéria temos a divisão entre hádrons e léptons. Elétrons, muons e tau juntamente com os neutrinos são léptons e elementares. Já os hádrons são divididos em bárions (proton, neutron, delta, etc ...) e mésons (pions, rho, etc ...). Tendo em mente o conceito de isospin juntamente com cálculos envolvendo o produto tensorial e soma direta de representações⁷, iremos apresentar um conjunto de argumentos que, de certa forma, justificam a necessidade dos hádrons serem compostos por quarks elementares. Demócrito já dizia: “Definimos o que é doce, amargo ou as cores, mas a composição destas definições está nos átomos.

4.4.1 A questão dos sabores, isospin e SU(2) global

Como sabemos, podemos organizar algumas partículas conhecidas no diagramas de peso abaixo, caracterizando as mesmas tendo em vista a simetria de isospin $SU(2)$ global (dubleto) da interação forte e $U(1)$ global (singleto) da conservação de carga elétrica:



sendo, t o isospin total e t_3 é a projeção do isospin ao longo de um eixo arbitrário (geralmente denominado eixo 3). A Carga elétrica das partículas é dada pela expressão, $Q = e(T_3 + \frac{1}{2}B)$ (isospin + n°.bariônico). No presente momento temos a seguinte divisão:

$$\text{Hádrons} \begin{cases} \text{bárions: } p, n, \Delta \\ \text{mésons: } \pi, \rho \end{cases}$$

⁷Para maiores detalhes, convidamos os leitores a bisbilhotar os Apêndices A e B.

Pois bem, com duas partículas de isospin $t = \frac{1}{2}$ (quarks up u e down d) podemos gerar todas as partículas anteriores observando não apenas o diagrama de peso abaixo mas também o produto tensorial de duas e três representações de isospin $t = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 t = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\text{quarks}} \quad t_3 \\
 \begin{array}{ccc}
 & d & u \\
 & \bullet & \bullet \\
 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}
 \end{array} \\
 \\
 2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (B = 0, \text{ mésons}) \\
 2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \oplus 2 \oplus 4 \quad (B = 1, \text{ bárions})
 \end{array} \tag{4.57}$$

Neste caso, sendo os prótons e neutrões compostos por quarks, concluímos que os quarks possuem as seguintes cargas elétricas:

$$\begin{array}{l}
 p = 2u + d \quad t_3 = \frac{1}{2} \\
 n = 2d + u \quad t_3 = -\frac{1}{2}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 1 = 2u + d \quad u = \frac{2}{3} \\
 0 = 2d + u \quad d = -\frac{1}{3}
 \end{array} \tag{4.58}$$

Campos	T	T_3	B	Campos	T	T_3	B
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

condizente com a relação, $Q_{em} = T_3 + \frac{1}{2}B$, assim concluímos que

Campos	T_3	B	$T_3 + B/2$	Q_{em}
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Para ganharmos familiaridade com o conceito dos bárions e mésons estarem sendo compostos por quarks, podemos representar a troca de píons por núcleons no modelo de *Yukawa-Heisenberg-Tamm* em termos dos quarks up e down como nas Fig. 9 e Fig. 10.

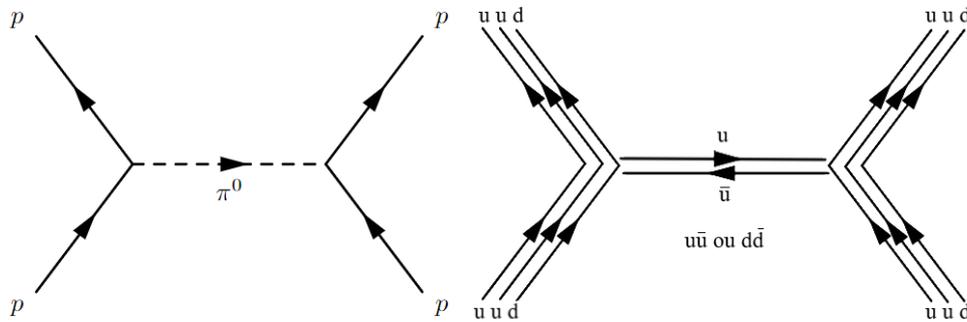


Figura 13: Troca de píons por prótons em termos dos quarks e observe que o quark se comporta como operador de criação com o antiquark sendo o operador de destruição ($u\bar{u}$) $u = u$)

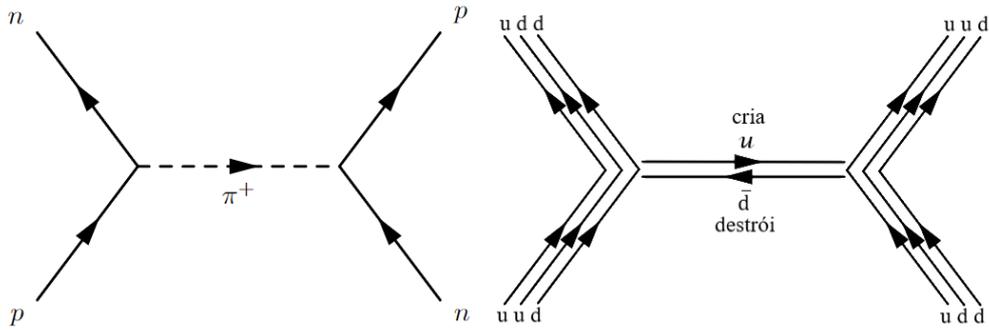


Figura 14: Prótons viram nêutrons por troca de pions em termos dos quarks ($((u\bar{d})d = u)$)

Podemos também representar reações nucleares permitidas em termos dos quarks elementares, onde confirmamos a conservação do isospin, número bariônico e carga elétrica, como nos diagramas da Fig. 15 e Fig. 16.

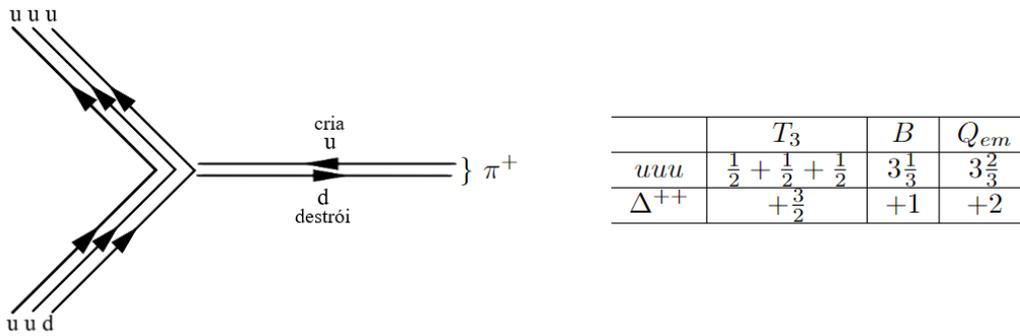
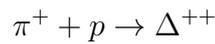
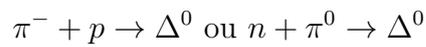


Figura 15: Produção da partícula delta mais carregada no espalhamento de pions por prótons



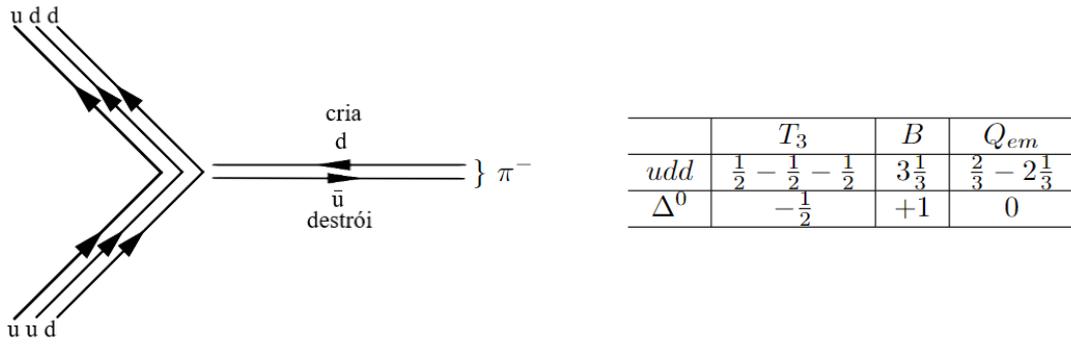


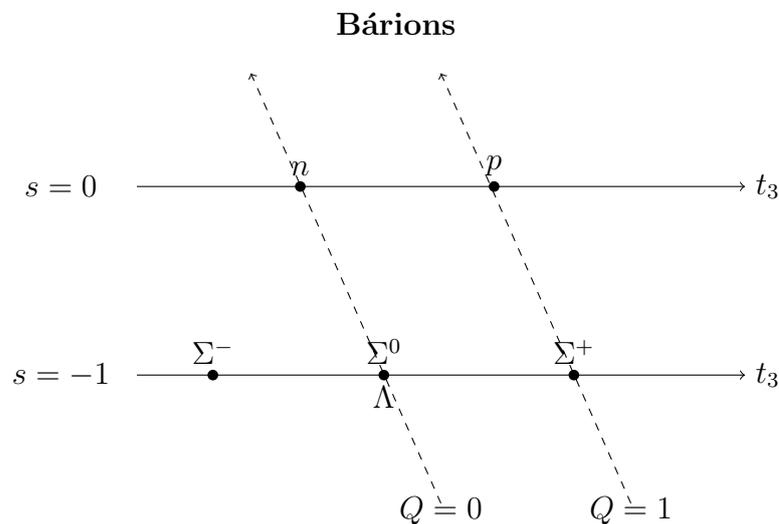
Figura 16: Prudução da partícula delta neutro no espalhamento do pion negativo por prótons

Agora é de nosso conhecimento via experimentos que existem reações permitidas e proibidas pela interação forte:

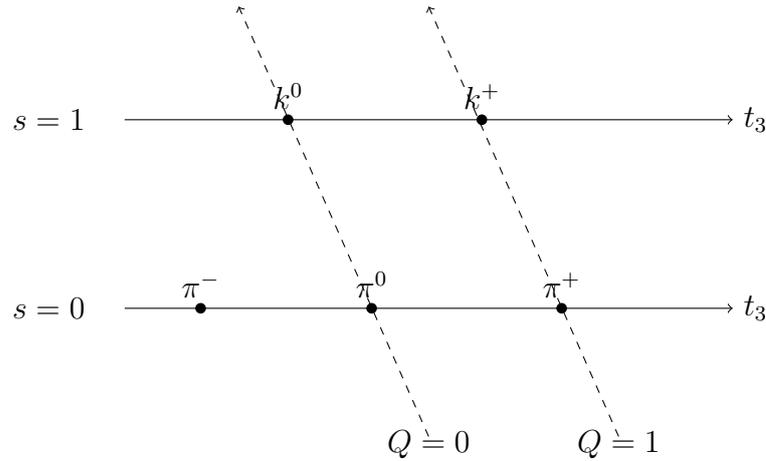
$$\begin{aligned}
 \pi^- + \rho^+ &\rightarrow K^+ + \Sigma^- \\
 &\rightarrow K^0 + \Sigma^0 \quad (\text{permitido}) \\
 &\rightarrow K^0 + \Lambda
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 \pi^- + \rho^+ &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \\
 &\rightarrow \pi^0 + \Lambda \quad (\text{proibido}) \\
 &\rightarrow k^0 + n
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

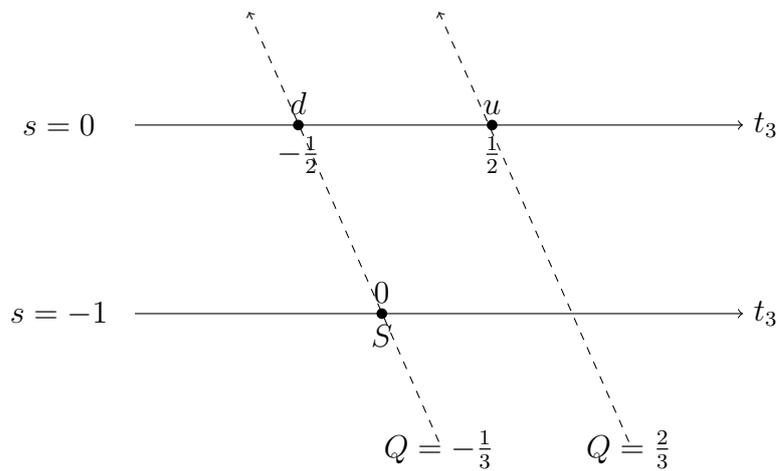
e uma explicação plausível para essas reações seria a relação de Gell-Mann–Nishijima para cargas $Q = e(T_3 + \frac{1}{2}Y)$, sendo $Y = B + S$ (hipercarga = n°. bariônico + estranheza), em que implementamos mais um número quântico conservado globalmente ou sabor denominado estranheza s . Neste caso, incluímos nos diagramas de peso de isospin anteriores, mais um eixo, a para acomodar as partículas de sabor estranho, como pode ser visto nas figuras abaixo, para o caso de bárions e mésons.



Mésons

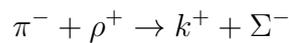


Portanto, percebemos que, se implementando mais um sabor de quark (estranho), como no diagrama de peso abaixo



	t	t_3	B	S
$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

acomodamos todas as partículas hadrônicas investigadas no texto. Para reafirmar a necessidade do quark estranho escrevemos a reação



em termos dos quarks elementares up, down e strange. Isso pode ser visto nos diagramas da Fig. 17 e Fig. 18.

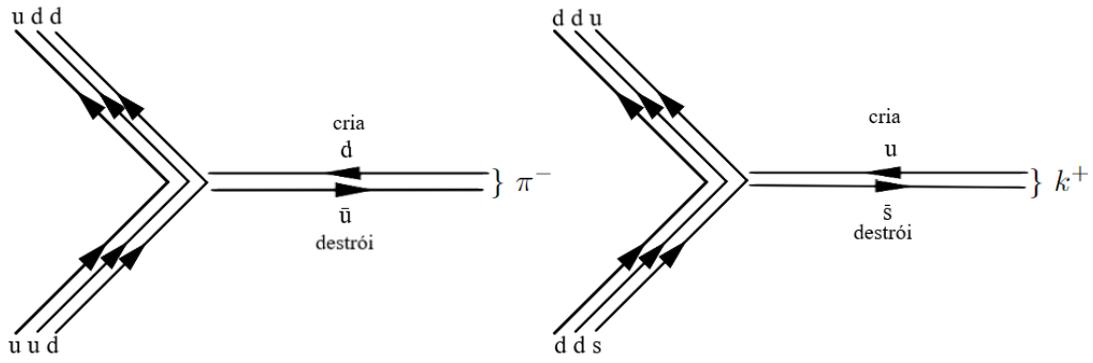


Figura 17: Vértices associados a produção de pions negativos via troca de prótons por neutrons e produção de kaons positivos via troca de neutrons por partícula sigma

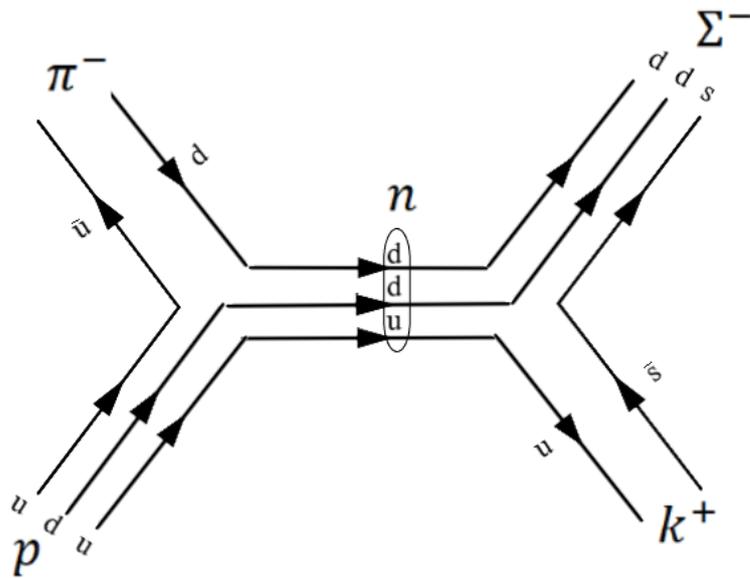


Figura 18: Captura de um pion negativo por um próton e decaimento do nêutron em sigma menos e kaons

Claramente o número de partículas utilizadas no texto foi reduzido perante as partículas experimentais conhecidas por motivos pedagógicos. Todavia, para realmente acomodarmos todas as partículas conhecidas e organiza-las nos diagramas de peso utilizamos a mesma receita do caso envolvendo a simetria de isospin SU(2) global. Por exemplo, ao incluirmos o quark estranho temos uma simetria SU(3) global (triplete), onde os mésons são compostos por quark-antiquark e os bárions por três tipos de quarks

$$3 \otimes 3 \quad (B = 0, \text{mésons})$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 \quad (B = 1, \text{bárions}) \tag{4.61}$$

Como testemunhamos, a medida que aparecem mais partículas hadrônicas e a necessidade de mais sabores (up, down, strange, charm, bottom e top) vamos aplicando a mesma metodologia esboçada anteriormente, mudando apenas a simetria de calibre global e organizando as partículas em produtos tensoriais de N-pletos. No caso geral, temos uma simetria de calibre global SU(6)

$$6 \otimes 6 \quad (36 \text{ mésons})$$

$$6 \otimes 6 \otimes 6 \quad (216 \text{ bárions}) \quad (4.62)$$

concluimos que poderíamos ter em torno de 252 partículas hadrônicas na natureza excluindo outras possibilidades envolvendo partículas exóticas e exóticas. O interessante é que os quarks que conhecemos são organizados em 3 famílias analogamente aos elétrons. Experimentalmente foram medidos por volta de 260 hadrons.

Apesar de termos acomodado as partículas com a ajuda de uma simetria de calibre não abeliana global a indagação que permanece é se seria possível impelmentar uma dinâmica por meio de uma simetria de calibre não abeliana local, assunto explorado no próximo tópico.

4.4.2 A questão das cores e a simetria de calibre SU(3) local

Nas palavras de P.M. Dirac: "O matemático joga um jogo no qual ele mesmo inventa as regras, enquanto o físico joga um jogo no qual as regras são inventadas pela Natureza" Será esse o caso das cores, é o que veremos a seguir. Apesar dessa secção ser similar ao tema já investigado no trabalho, envolvendo teorias de calibre global e local, vamos investigar a simetria interna SU(N) com mais detalhes.

Dada uma ação

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(\psi_A, \partial_\mu \psi_A) \quad A = 1, 2, 3 \dots N \quad (4.63)$$

com simetria de SU(N) global, dada a transformação ($U = \exp[i\varepsilon_a T_{(a)}]$) com parâmetros infinitesimais ε_a

$$\begin{aligned} \psi_A &\rightarrow \psi'_A = \psi_A + \delta\psi_A \\ &= \exp[i\varepsilon_a T_{(a)}]_{AB} \psi_B \quad \varepsilon \sim 0 \\ &= \delta_{AB} \psi_B + iT_{(a)AB} \varepsilon_a \psi_B \end{aligned} \quad (4.64)$$

temos a seguinte corrente conservada do princípio da mínima ação $\delta S = 0$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} \delta\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_A)} \delta(\partial_\mu\psi_A) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_A)} \right) \delta\psi_A + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_A)} \delta\psi_A \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde percebemos uma equação da continuidade $\partial_\mu J_{(a)}^\mu = 0$ e definimos um as correntes conservadas $J_{(a)}^\mu$

$$J_{(a)}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_A)} i T_{(a)}^{AB} \psi_B. \quad (4.66)$$

Agora da álgebra de $SU(N)$

$$\begin{aligned} U &= \exp[iT_{(a)}\varepsilon_a] \exp[iT_{(b)}\varepsilon_b] \exp[-iT_{(a)}\varepsilon_a] \exp[-iT_{(b)}\varepsilon_b] \\ &\sim 1 + \varepsilon_a \varepsilon_b [T_{(a)}, T_{(b)}] \\ &= 1 + iT_{(c)}\varepsilon_c \end{aligned} \quad (4.67)$$

temos que $[T_{(a)}, T_{(b)}] = if_{abc}T_{(c)}$ e definimos a dimensão do espaço algébrico H

$$U = \exp[iH] \quad (4.68)$$

$$\dim H = 2N^2 \quad (\text{setor real} + \text{imaginário}) \quad (4.69)$$

e devido a unitariedade, $U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow H^\dagger = H$, devemos nesse espaço hermitiano eliminar não apenas um setor triângular Δ mas N elementos da diagonal por serem reais, $2N^2 = 2N + 2\Delta$.

$$\begin{aligned} \dim H &= 2N^2 - \Delta - N \\ &= N^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por fim, a condição especial $\det U = \exp[\text{tr}(\ln U)] = 1$, nos leva á $\text{tr} H = 0$ e neste caso eliminamos mais uma variável e concluímos, $\dim H = N^2 - 1$.

Por outro lado, ao investigar uma simetria de calibre em um patamar local $SU(N)$, $\varepsilon_a \rightarrow \varepsilon_a(x)$

$$\mathcal{L}(\psi_A, \partial_\mu \psi_A) = \bar{\psi}_A (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_A \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} D'_\mu(\exp[iT_{(a)}\varepsilon_a]\psi) &= \exp[iT_{(a)}\varepsilon_a] D_\mu \psi', \quad D_\mu = \partial_\mu - igT_{(a)}A_\mu^a, \\ [\partial_\mu - igT_{(a)}(A_\mu^a + \delta A_\mu^a)] \exp[iT_{(b)}\varepsilon_b] \psi &= \exp[iT_{(b)}\varepsilon_b] (\partial_\mu - igT_{(a)}A_\mu^a) \psi, \\ T_{(b)}\partial_\mu \varepsilon_b - ig[T_{(a)}, T_{(b)}]\varepsilon_b A_\mu^a - gT_{(a)}\delta A_\mu^a &= 0, \\ T_{(b)}\partial_\mu \varepsilon_b + gf^{abc}T_{(c)}\varepsilon_b A_\mu^a - gT_{(a)}\delta A_\mu^a &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Como os índices romanos são mudos, neste caso teremos,

$$\begin{aligned} A'_\mu{}^a &= A_\mu^a + \delta A_\mu^a \\ \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon_a + f^{abc} \varepsilon_b A_{c\mu} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Com as transformações de calibre dos gluons $A_{a\mu}$ definimos a derivada covariante D_μ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ D_\mu &= \partial_\mu - igT_{(a)}A^a_\mu\end{aligned}\tag{4.74}$$

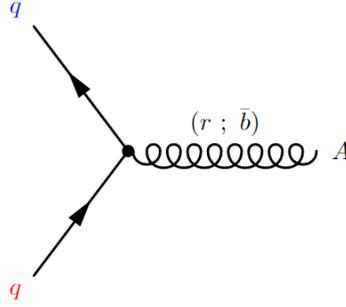


Figura 19: Vértice de interação entre quarks de cor e gluons

Por fim, nos resta construir a Lagrangiana livre dos gluons. É de nosso conhecimento do eletromagnetismo que $[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$, e de maneira analogamente teremos,

$$\begin{aligned}[\partial_\mu - igT_{(a)}A^a_\mu, \partial_\nu - igT_{(b)}A^b_\nu] &= -ig(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_{(c)} - g^2[T_{(a)}, T_{(b)}]A^a_\mu A^b_\nu \\ &= -igT_{(c)}[(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu] \\ &= -igT_{(a)}F^a_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.75}$$

Dessa forma denotamos a densidade de Lagrangiana de gluons (radiação)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}[(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu]^2.\end{aligned}\tag{4.76}$$

Observe que temos auto-acoplamentos entre os gluons, vistos na Fig. 20.

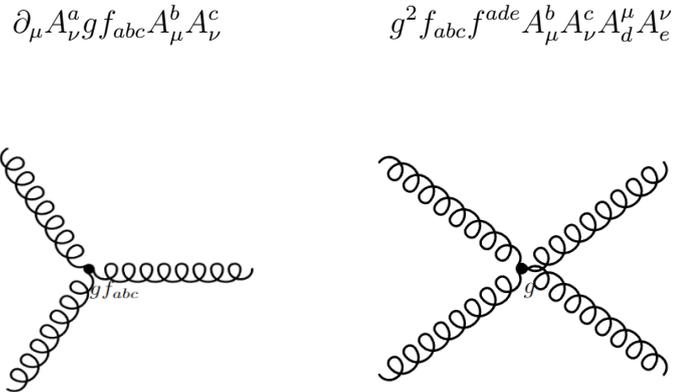


Figura 20: Acoplamentos triplos e quárticos entre os gluons

Logo, finalizamos com a lagrangiana da cromodinâmica descrevendo a interação entre quarks (matéria) e gluons (radiação)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cromo} &= -\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ D_\mu &= \partial_\mu - igT_{(a)}A_\mu^a, \quad F^a{}_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c.\end{aligned}\tag{4.77}$$

Só nos resta mostrar que $F^a{}_{\mu\nu}$ é invariante de calibre

$$\begin{aligned}A_\mu^a &\rightarrow A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\varepsilon_a^\mu + f_{abc}\varepsilon^b A_\mu^c \\ [D'_\mu, D'_\nu] &= igT_{(a)}F'^a{}_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.78}$$

É de nosso conhecimento que devido a indetidade de Jacobi $[T_{(a)}, [T_{(b)}, T_{(c)}]]$, $\delta F^a{}_{\mu\nu} = f^{abc}F_{b\mu\nu}\varepsilon_c$, e sendo assim

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_g &= -\frac{1}{2}F^{a\mu\nu}\delta F^a{}_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\underbrace{f^{abc}}_{\text{anti-simétrico}}\underbrace{F_a{}^{\mu\nu}F_{b\mu\nu}}_{\text{simétrico}} = 0\end{aligned}\tag{4.79}$$

Observe que se aplicamos uma transformação global nos campos gluônicos,

$$\begin{aligned}A_\mu^a &\rightarrow A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu + \frac{1}{g}\underbrace{\partial_\mu\varepsilon_a^\mu}_0 + f_{abc}\varepsilon^b A_\mu^c \\ A'^a{}_\mu &= (1 + f_{abc}\varepsilon^b)A^c{}_\mu \\ &= (1 + iT_{(b)ac}\varepsilon_b)A^c{}_\mu\end{aligned}\tag{4.80}$$

percebemos não apenas que $T_{(b)ac} = if_{bac}$ mas também

$$A'^a{}_\mu = \exp[iT_{(b)}\varepsilon^b]A^c{}_\mu.\tag{4.81}$$

Dizemos então que os campos A_μ^a se transformam na representação adjunta de $SU(N)$ devido a indetidade de Jacobi

$$\begin{cases} [T_{(a)}, T_{(b)}] = if^{abc}T_{(c)}, \\ T_{(a)bc} = if_{abc}. \end{cases}$$

Na natureza, quarks possuem 3 cores $SU(3)$, com um total de $N^2 - 1 = 8$ gluons

$$\psi = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix}$$

e a afirmação anterior está embasada em fatos experimentais envolvendo não apenas o decaimento do π_0 em fótons mas também no decaimento do W^- , como visto nas Fig. 21 e Fig. 21 respectivamente.

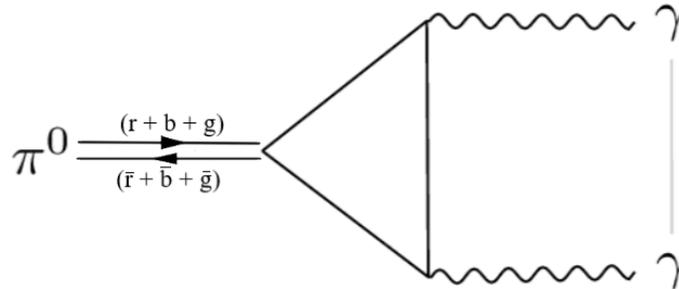


Figura 21: No decaimento do píon neutro em 2 fótons temos 3 cores contribuindo no triângulo de quarks (interação forte)

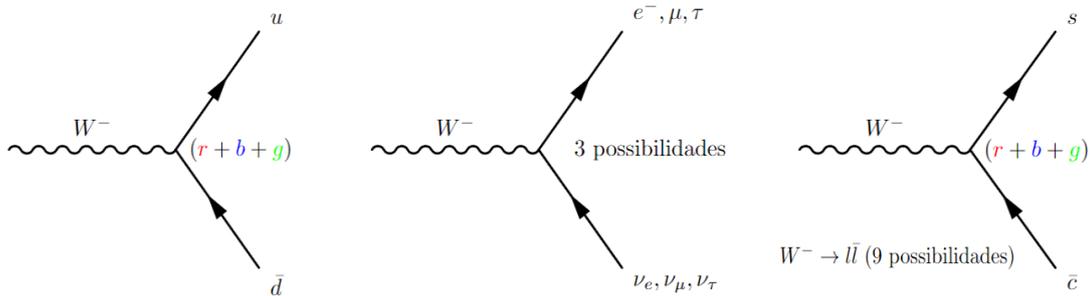


Figura 22: No decaimento do bóson vetorial carregado aumentamos os canais de decaimento do mesmo, tendo em vista a possibilidade de cores (interação fraca)

Concluimos o tópico vislumbrando o modelo de Yukawa-Heisenberg-Tamm da interação forte na linguagem do Modelo Padrão nas Fig. 23 e Fig. 24, com uma dinâmica de sabor e cor a contecendo a todo momento nos confins da matéria (nucleo do átomo).

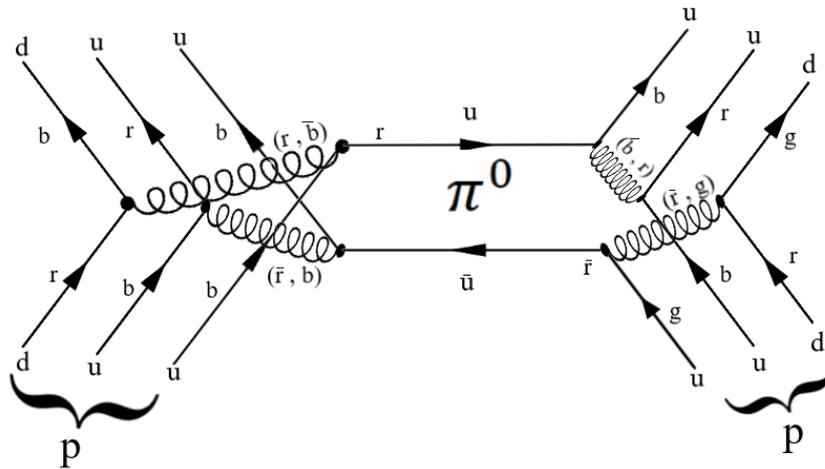


Figura 23: Troca de pions neutros por prótons em uma dinâmica de sabor e cor

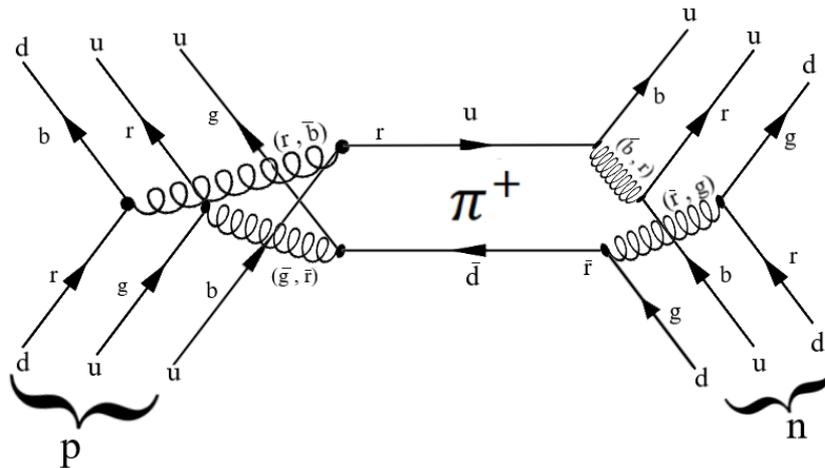


Figura 24: Um próton vira um neutro e vice versa via troca de um pion carregado positivamente em uma dinâmica de sabor e cor

4.5 Campos intermediadores da interação eletrofraca na abordagem de Stückelberg

Com o intuito de investigar uma física além do modelo padrão ao modo detetivesco de Sherlock Holmes: "Uma vez eliminado o impossível, o que restar, não importa o quão improvável, deve ser a verdade". De todas possibilidades teóricas o experimento vai dizer quais são viáveis e inviáveis mas não devemos descartar os ensinamentos que as possibilidades teóricas nos agregam. Vamos supor que no modelo de leptons nossos fótons sejam descritos por campos vetoriais massivos de Stückelberg. Neste caso, o setor de calibre na eq. (4.20) é modificado da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{calibre} = -\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{m_S^2}{2}(B_\mu - \frac{1}{m_S}S_\mu)(B^\mu - \frac{1}{m_S}S^\mu) \quad (4.82)$$

de tal forma que a simetria de calibre local $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ seja preservada

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \varepsilon_{(x)}^a + f_{cb}^a A_\mu^b \varepsilon_{(x)}^c \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \\ S_\mu &\rightarrow S_\mu + m_S \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \quad (4.83)$$

sendo m_S a massa de Stüeckelberg.

Agora o espectro de massa para os bosons vetorias, ao incluir o mecanismo de Higgs, é dado pela seguinte expressão

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\tau^a A_\mu^a + \frac{1}{2}g'B_\mu \\ \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{m_S^2}{2} B_\mu B^\mu \quad (4.84)$$

Dessa forma podemos novamente definir um ângulo de mistura de Weinberg ($\theta = \theta_w + \delta$), associado a mudança de base e diagonalização da matrix de massa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^3 & B \end{pmatrix} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 + \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z^0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & m_A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.85)$$

onde $\mu^2 = 2\frac{m_S^2}{v^2}$ e também encontramos as relações

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} [g^2 \cos^2\theta + 2gg' \sin\theta \cos\theta - (g'^2 + \mu^2) \sin^2\theta] &= m_Z^2 \\ g^2 \sin\theta \cos\theta - gg' \cos^2\theta + gg' \sin^2\theta + (g'^2 + \mu^2) \sin\theta \cos\theta &= 0 \\ \frac{v^2}{2} [g^2 \cos^2\theta + 2gg' \sin\theta \cos\theta - (g'^2 + \mu^2) \sin^2\theta] &= m_A^2. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Considerando m_S pequeno tendo em vista o limite de fótons não massivos e lembrando que $m_W = \frac{gv}{2}$

$$\frac{m_W^2}{\cos^2\theta_w} - m_S^2 \sin^2\theta = m_Z^2$$

$$\tan 2\theta = \frac{2gg'}{g^2 - g'^2 - \mu^2} \sim \frac{2gg'}{g^2 + g'^2}$$

$$m_A = m_S \cos \theta_w \quad (4.87)$$

e neste caso concluiríamos que

$$m_Z \cos \theta_w = m_W \left[1 - \frac{m_S}{2m_W} \sin^2 \theta_w \right]. \quad (4.88)$$

Comparando com os dados experimentais temos 4 variáveis (m_W, m_Z, θ_w e m_S) e 3 equações

$$m_W \sin \theta_w = 35,3$$

$$m_W = m_Z \cos \theta_w$$

$$\theta_w = 29^\circ \quad (4.89)$$

e sendo assim, precisamos de mais uma condição para encontrar a massa do fóton m_S . Lembrando da incerteza experimental da carga elétrica

$$e + \Delta e = g \sin(\theta_w + \delta) = g[\sin \theta_w \cos \delta + \sin \delta \cos \theta_w], \quad (\delta \sim \text{pequeno}). \quad (4.90)$$

Portanto somos levados ao seguintes resultados

$$e = g \sin \theta_w \cos \delta$$

$$\Delta e = g \sin \delta \cos \theta_w \quad (4.91)$$

e concluímos que

$$\tan \delta = \frac{\Delta e}{e} \tan \theta_w \sim \delta \Rightarrow \delta \sim 3,919 \times 10^{-11}$$

$$\frac{\Delta e}{e} \sim \frac{1}{2} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \sim 8 \times 10^{-11} \quad (4.92)$$

onde α é a constante de estrutura fina e uma das medidas experimentais mais precisas

atualmente⁸ (CODATA 2022).

Agora com as relações

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2gg'}{g^2 - g'^2 - \mu^2} \\ e &= g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \end{aligned} \quad (4.93)$$

somos conduzidos ao resultado

$$\frac{\mu^2 \sin^2 2\theta_w}{e^2} = \left[\frac{1}{\tan 2\theta_w} - \frac{1}{\tan 2\theta} \right]. \quad (4.94)$$

Utilizando as relações

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 2 \frac{m_S^2}{v^2} \\ m_W &= \frac{gv}{2} \\ m_A &= m_S \cos \theta_w \end{aligned} \quad (4.95)$$

juntamente com a identidade

$$\tan 2\theta = \tan(2\theta_w + 2\delta) \sim \frac{\tan 2\theta_w}{1 - 2 \tan 2\theta_w \delta} \quad (4.96)$$

na eq. (4.94), concluímos que a massa do fóton A_μ não pode ser maior do que o valor abaixo

$$\begin{aligned} \frac{m_A^2}{m_W^2} &\leq 2\delta \sim 7,838 \times 10^{-11} \\ m_W &\sim 1,573 \times 10^5 m_e \\ m_A &\leq 0,139 m_e \end{aligned} \quad (4.97)$$

eliminando assim a possibilidade da massa do fóton ser grande ou maior que esse limite superior, sendo da ordem de grandeza do mesmo dada pela massa do elétron m_e . Portanto, quanto mais preciso é a medida da carga elétrica ($m_A \rightarrow 0$).

⁸Como $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ temos a seguinte relação envolvendo a propagação de incertezas

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 2 \frac{\Delta e}{e} - \frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0} - \frac{\Delta\hbar}{\hbar} - \frac{\Delta c}{c}.$$

5 Considerações finais e perspectivas

Como foi possível constatar ao longo do texto, elucidamos a intrincada relação entre massa e simetria de calibre no estudo da dinâmica de interação envolvendo troca de radiação pela matéria, apresentando a evolução dos conceitos da Física de um ponto de vista histórico-pedagógico, iniciando a jornada em modelos eletromagnéticos básicos (Proca-Stüeckelberg) e culminando com uma possível física e teoria eletrofraca além do modelo padrão (Weinberg-Stüeckelberg). Os conceitos e narrativas envolvendo massa e simetria de calibre vão sendo revisitados, sofisticados e reformulados ao longo da leitura levando em consideração a dinâmica ou força da natureza estudada, quais sejam:

Interação eletromagnética entre elétrons e fótons-*electrodynamics*

Interação fraca entre léptons e bósons vetoriais massivos-*flavordynamics*

Interação forte entre bárions e mésons-*hadrodynamics*

Interação forte entre quarks e glúons-*chromodynamics*.

De início do modelo de Proca apresentamos a fenomenologia do potencial de curto alcance de Yukawa e estimamos uma massa de $m_Y \sim 235 \frac{MeV}{c^2}$ para as partículas mensageiras da interação forte no interior do núcleo atômico. Por outro lado, com a massa dos píons ($m_\pi \sim 140 \frac{MeV}{c^2}$) temos um alcance de $1,4 fm$ e condizente com o tamanho estimado do núcleo do átomo de Hidrogênio. Além disso, recuperamos a simetria de calibre $U(1)$ local com o truque de Stüeckelberg envolvendo campos auxiliares.

Dando continuidade, após apresentar aspectos gerais da simetria de calibre local e global, investigamos o mecanismo de Higgs envolvendo a quebra espontânea de simetria e geração de massa para partículas mensageiras. De maneira geral demonstramos o Teorema de Goldstone e aplicamos o mesmo no contexto das quebras de simetrias globais $U(1)$, $SO(2)$ e $SU(2)$. O interessante do mecanismo é que os campos vetoriais mensageiros engolem os bósons de Goldstone ganhando massa e conservando os graus de liberdade físico do sistema. O interessante é que existe uma íntima relação entre os bósons de Goldstones θ e o campo de Stüeckelberg ($B_\mu = \partial_\mu \theta$).

Seguindo a idéia de O. Klein para descrever a interação fraca no núcleo via campos mensageiros vetoriais massivos e carregados (W^\pm), expomos o modelo de Leite Lopes, onde ao compararmos com o modelo de Fermi à baixas energias encontramos uma massa de $m_W \sim 100 \frac{MeV}{c^2}$. Comparando esses bósons vetoriais com os mésons vemos que essas partículas vivem no núcleo atômico tendo em mente sua escala de massa. Logo em seguida, extendemos o modelo de Leite Lopez para conter um bóson vetorial neutro Z_0 (Bludman-Glashow) via simetria de calibre $SU(2)$ global (dubletos de Heisenberg-Tamm).

Culminamos na teoria eletrofraca de Weinberg-Salam onde além dos campos mensageiros da interação fraca ganharem massa via mecanismo de Higgs, recuperamos a baixas

energias a teoria fraca V-A de Feynman-Gell-Mann, e também ao ajustar com dados experimentais encontramos as seguintes massas para os campos mensageiros $m_W \sim 80,69 \frac{MeV}{c^2}$ e $m_Z \sim 89,85 \frac{MeV}{c^2}$, próximo em escala ao resultado obtido por Leite Lopez. Mostramos também como obter a massa do Higgs via decaimento em 4 léptons e 2 fótons, $m_h \sim 125 \frac{GeV}{c^2}$.

Após completar a construção do Modelo Padrão com sabores e cores para os quarks, investigamos uma física além do Modelo Padrão, implementando fótons massivos de Stückelberg na teoria eletrofraca. Tendo em vista a incerteza experimental relativa da constante de estrutura fina, encontramos um limite superior para massa desse fóton inferior a massa do elétron ($m_A \leq 71 \frac{KeV}{c^2}$)

Finalizamos o trabalho com uma citação de J. Schwinger: "O propósito da física teórica é ser nada mais do que um catálogo de todas as coisas que podem acontecer quando partículas interagem umas com as outras e se separam? Ou é para ser um entendimento em um nível mais profundo no qual existem coisas que não são diretamente observáveis (como os campos quantizados subjacentes), mas em termos dos quais teremos uma compreensão mais fundamental?" Seguindo Wittgenstein talvez os limites da nossa linguagem significam os limites do nosso mundo.

A Álgebra de $SU(2)$

A álgebra de isospin \hat{T} , é representada pela álgebra de Lie $SU(2)$. A álgebra de Lie associada ao grupo $SU(2)$ é composta por operadores que satisfazem relações de comutação específicas. Estes operadores são análogos aos geradores de rotações no espaço tridimensional, que são dados pelas matrizes de Pauli τ_i :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Os operadores de isospin $T_i = \frac{1}{2}\tau_i$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[T_1, T_2] = iT_3 \quad [T_2, T_3] = iT_1 \quad [T_3, T_1] = iT_2 \quad (\text{A.1})$$

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

O vetor de isospin \vec{T} pode ser representado como:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= T_1 \hat{x}_1 + T_2 \hat{x}_2 + T_3 \hat{x}_3 \\
\vec{T}^2 &= T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \\
&= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Assim, temos que:

$$[\vec{T}^2, T_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Conjunto Completo de Operadores Comutantes (CSCO).

Definindo os operadores T_- e T_+ , tal que $T_+^\dagger = T_-$, temos:

$$T_\pm = T_1 \pm iT_2 \tag{A.3}$$

Dessa forma, teremos as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned}
[T_3, T_\pm] &= [T_3, T_1] \pm i[T_3, T_2] \\
&= iT_2 \pm T_1 \\
&= \pm T_\pm
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
[T_+, T_-] &= [T_1 + iT_2, T_1 - iT_2] \\
&= -i[T_1, T_2] + i[T_2, T_1] \\
&= 2T_3
\end{aligned} \tag{A.5}$$

auto-estados:

$$\begin{cases} \vec{T}^2 |\lambda, m\rangle = \lambda |\lambda, m\rangle \\ T_3 |\lambda, m\rangle = m |\lambda, m\rangle \end{cases} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
T_3 T_\pm |\lambda, m\rangle &= [T_3, T_\pm] |\lambda, m\rangle + T_\pm T_3 |\lambda, m\rangle \\
&= (m \pm 1) T_\pm |\lambda, m\rangle \\
&= (m \pm 1) |\lambda, m \pm 1\rangle
\end{aligned}$$

projeção e normalização:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda, m | T_{\mp} T_{\pm} | \lambda, m \rangle &= \langle \lambda, m | (T_1^2 + T_2^2 \pm i[T_1, T_2]) | \lambda, m \rangle \\
&= \langle \lambda, m | \vec{T}^2 - T_3(T_3 \pm 1) | \lambda, m \rangle \\
&= \lambda - m(m \pm 1) \geq 0 \\
\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - m(m \pm 1) &= 0 \quad m = \frac{1}{2} \text{ ou } m = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

notação, $|\lambda = t(t+1)m\rangle = |t, t_3\rangle$, temos os operadores de escada:

$$\begin{aligned}
\langle t, t_3 | T_{\mp} T_{\pm} | t, t_3 \rangle &= t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1) \\
T_{\pm} | t, t_3 \rangle &= \sqrt{t(t+1) - t_3(t_3 \pm 1)} | t, t_3 \pm 1 \rangle
\end{aligned} \tag{A.8}$$

B Produto tensorial e soma direta de representações

Produto tensorial, soma direta e coeficientes de Clebsh-Gordan das representações.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} &= 0 \oplus 1 \\
\hat{L}, \hat{S}, \hat{T} : 1 \otimes \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

sabemos que o momento angular \hat{L} , o spin \hat{S} e o isospin \hat{T} compartilham uma álgebra semelhante,

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k \\
\hat{J}^2 &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0 \quad i = x, y, z. \\
\hat{J}_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\
\hat{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Podemos definir, $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$, e neste caso temos uma álgebra de escada, sendo os operadores \hat{J}_+ e \hat{J}_- , subir e descer índices, respectivamente. A partir disso temos que:

$$\begin{aligned}
[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] &= \pm \hat{J}_{\pm} \\
[\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hat{J}_z \\
[\hat{J}^2, \hat{J}_{\pm}] &= 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

assim os operadores atuam nos estados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{\pm} |j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle \\
m &\Rightarrow (2j+1), \quad -j, -j+1, \dots, j-1, j
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Se temos uma soma $\hat{J}_i = \hat{J}_i^1 + \hat{J}_i^2$, a soma também obedece à álgebra Lie

$$\begin{aligned}\hat{J}_z &= \hat{J}_z^1 + \hat{J}_z^2 \\ \hat{J}_\pm &= \hat{J}_\pm^1 + \hat{J}_\pm^2\end{aligned}\tag{B.5}$$

segue que,

$$\begin{aligned}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \\ \dim(j_1 \otimes j_2) &= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \quad (\text{dimensões do estados})\end{aligned}\tag{B.6}$$

Exemplo 1: $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, $|j, m\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

$$\begin{aligned}\hat{J}_z |j, m\rangle &= (\hat{J}_z^1 + \hat{J}_z^2) \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{m=1} |j, m\rangle\end{aligned}\tag{B.7}$$

logo, $|1, 1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{J}_- |1, 1\rangle &= \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |1, 0\rangle \\ \sqrt{2} |1, 0\rangle &= (\hat{J}_-^1 + \hat{J}_-^2) \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right)\end{aligned}\tag{B.8}$$

e observe que, $\hat{J}_z |1, 0\rangle = (\hat{J}_z^1 + \hat{J}_z^2) |1, 0\rangle = 0 |1, 0\rangle$. De maneira imediata percebemos que, $|1, -1\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Como temos um espaço de $\dim 4$,

$$\dim \left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \right) = \left(2\frac{1}{2} + 1\right) \left(2\frac{1}{2} + 1\right) = 4$$

e temos três estados ortogonais, $|1, 1\rangle, |1, 0\rangle$ e $|1, -1\rangle$, encontramos o estado que falta,

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \right)\tag{B.9}$$

note que, $\hat{J}_z = |0, 0\rangle = 0|0, 0\rangle$ e $\hat{J}_\pm|0, 0\rangle = 0|0, 0\rangle$.

Portanto,

$$\dim\left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}\right) = \dim(0 \oplus 1) \quad (\text{B.10})$$

$$4 = 1 + 3$$

de maneira geral ($j_1 = j_2$)

$$j_1 \otimes j_2 = (j_1 - j_2)(j_1 - j_2 + 1)\dots(j_1 + j_2) \quad (\text{B.11})$$

pois,

$$\begin{aligned} \dim(j_1 \otimes j_2) &= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) \\ &= \frac{2j_2+1}{2} [(2(j_1-j_2)+1) + (2(j_1+j_2)+1)] \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Portanto a combinação de duas partículas de isospin $\frac{1}{2}$ tem representações escalar e vetorial

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$$

Os estados são dados por $|j, m\rangle$

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right) \\ |1, -1\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \right) \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

para facilitar, tabelamos os resultados. $|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m\rangle$ (relação de fechamento), em que $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 |$ são os coeficientes de Clebsh-Gordan.

Exemplo 2: $1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$, $\dim(3 \otimes 2) = \dim(2 \oplus 4)$.

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = |1, -1\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}(1+1)(1-1+1)} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
\hat{J}_+^1 |1, -1\rangle &= \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |1, 0\rangle \\
&= \sqrt{2} |1, 0\rangle
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+^2 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+1)(1-1+1)} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

assim, neste caso, $\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
\hat{J}_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}(1+1)(1-1+1)} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
\hat{J}_-^1 |1, 1\rangle &= \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |1, 0\rangle \\
&= \sqrt{2} |1, 0\rangle
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_-^2 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+1)(1-1+1)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

sendo assim, $\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$. Agora precisamos encontrar a representação ortogonal,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= a |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + b |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
\begin{cases} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \\ \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \sqrt{2}a + b = 0 \end{cases}
\end{cases} \tag{B.16}$$

assim, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Agora:

$$\hat{J}_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hat{J}_-^1 |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, -1\rangle \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{J}_-^2 |1, 1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

portanto, $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1, 0\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$.

Organizamos as representações advindas do produto tensorial $1 \otimes \frac{1}{2}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{array} \right. \quad j = \frac{3}{2} \quad (\text{B.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{array} \right. \quad j = \frac{1}{2} \quad (\text{B.19})$$

Por fim com os exemplos **1** e **2** conseguimos fazer o produto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2}}_2 \otimes \underbrace{\frac{1}{2}}_2 \otimes \underbrace{\frac{1}{2}}_2 &= (0 \oplus 1) \otimes \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \oplus (1 \otimes \frac{1}{2}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}}_2 \oplus \underbrace{\frac{1}{2}}_2 \oplus \underbrace{\frac{3}{2}}_4 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

observado que as dimensões ou graus de liberdade estão balanceados,

$$2 \times 2 \times 2 = 2 + 2 + 4$$

. Esse estudo é importante para a compreensão das propriedades de partículas compostas por 2 ou 3 partículas consideradas fundamentais.

Referências

- [1] Yang, C. and R. Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. Phys. Rev. 96, 191 (1954); H. Weyl, Gravitation and Electricity, Preuss Akad. Wiss. 465, 29 (1918); H. Weyl, Electrons and gravitation. I, Zeit. f. Physik 330, 56 (1929); G. L. L. W. Levy e J. A. Helayël-Neto, Das equações de Maxwell à Teoria de Yang-Mills (Uma celebração aos 70 anos do artigo de Yang e Mills), Rev. Bras. Ens. Fis. (2024).
- [2] R. Shaw, Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles. Tese de Doutorado, Cambridge University, Cambridge (1955); J. C. Taylor, Gauge Theories In The Twentieth Century (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2001).
- [3] A. Nogueira e D. R. da Silva, Teorias de calibre a la Shaw-Deser, Rev. Bras. Ens. Fis. 42, e20200137, (2020); J. Furtado e J. Helayël-Neto, Yang-Mills-Shaw e as equações de Maxwell não-Abelianas, Rev. Bras. Ens. Fis. 44, e20220045 (2022).
- [4] R. Utiyama, Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, Phys. Rev. 101, 1597 (1957); O. A. Acevedo, R. R. Cuzinatto, B. M. Pimentel e P. J. Pompeia, Teorias de gauge a la Utiyama, Rev. Bras. Ens. Fis. 40, e4302 (2018).
- [5] V. Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields (Princeton University Press, Princeton, 2002).
- [6] A. Proca, Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs, J. Phys. Radium 7, 347 (1936); Sur la théorie du pósiton C. R. Acad. Sci. Paris 202, 1366 (1936); W. Heisenberg, On the Structure of Atomic Nuclei. I, I. Z. Physik 77, 1 (1932); I. G. Tamm, Interaction of Neutrons and Protons, Nature 133, 981 (1934); H. Yukawa, On the Interaction of Elementary Particles. I, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. 17, 48 (1935); E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi beta, Il Nuovo Cimento 9, 1 (1934); O. Klein, in Les Nouvelles Theories de la Physique, Proceedings of a symposium held in Warsaw, 30 May-3 June 1938 (Institut International de Cooperation Intellectuelle, Paris, 1938), p. 6.
- [7] Liang-Cheng Tu, Jun Luo and George T Gillies, The mass of the photon, Rep. Prog. Phys. 68 77 (2005).
- [8] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, (John Wiley and Sons, Singapore, 1999).

- [9] E. C. G. Stueckelberg, The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (I), *Helv. Phys. Acta* 11, 225 (1938); The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (II), *Helv. Phys. Acta* 11, 299 (1938); The interaction forces in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces (III), *Helv. Phys. Acta* 11, 312 (1938).
- [10] J. Lacki, H. Ruegg and G. Wanders e E.C.G. Stueckelberg, *An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics* (Birkhäuser Verlag AG, Basel, 2008).
- [11] H. Ruegg and M. R. Altaba, The Stueckelberg Field, *International Journal of Modern Physics A* 19, 3265 (2004).
- [12] E. Noether, Invariant Variation Problems, *Math-phys. Klasse* 1918, 235 (1918); translated by M.A. Tavel, arXiv: 0503066v2 (2005); O.A. Acevedo e B.M. Pimentel, Teoremas de Nöther: um estudo *Rev. Bras. Ens. Fis.* 45, e20230091 (2023).
- [13] Kazuhiko Nishijima, Charge Independence Theory of V Particles, *Progress of Theoretical Physics*, Volume 13, Issue 3, March 1955, Pages 285–304
- [14] M. Gell-Mann, The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets. *Nuovo Cim* 4 (Suppl 2), 848(1956).
- [15] J.Schwinger A Theory of the Fundamental Interactions, *Annals of Physics* 2, 407-434 (1957); M. Gell-Mann and M. Lévy, The Axial Vector Current in Beta Decay, II *Nuovo Cimento* 16, 705 (1960).
- [16] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Theory of the Fermi Interaction, *Phys. Rev.* 109, 193 (1958); S. A. Bludman, On the universal fermi interaction. *Nuovo Cim* 9, 433–445 (1958); G. Feinberg, Decays of the μ Meson in the Intermediate-Meson Theory, *Phys. Rev.* 110, 1482 (1958).
- [17] J. Leite Lopes, A model of the universal fermi interaction, *Nucl. Phys.* 8, 234 (1958); Forty years of the first attempt at the electroweak unification and of the prediction of the weak neutral boson Z_0 , *Braz. J. Phys.* 29, n3 (1999); O. Klein (1986) On the theory of charged fields, *Surveys in High Energy Physics*, 5:3, 269-285.
- [18] E. C. G. Sudarshan and R. E. Marshak, Chirality invariance and the universal Fermi interaction *Phys. Rev.* 109, 1860 (1958).
- [19] A. Salam and J. C. Ward, Weak and electromagnetic interactions, *Nuovo Cimento* 11, 568 (1959).
- [20] S. Glashow, The renormalizability of vector meson interactions, *Nucl. Phys.* 10, 107 (1959); Partial-symmetry of weak interactions. *Nucl. Phys.* 22, 579 (1961); A. Salam and J.C. Ward, Electromagnetic and weak interactions, *Phys. Lett.* 13, 168 (1964).

- [21] A. Salam thesis, Developments in quantum theory of fields, 1951; A. Salam, Phys. Rev. 82, 217 (1951).
- [22] Y. Nambu, Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 117, 648 (1960).
- [23] J. Goldstone, Field Theories with Superconductor Solutions, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
- [24] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [25] A. A. Nogueira and F. L. Braghin, Spontaneous symmetry breakings in the singlet scalar Yukawa model within the auxiliary field method, Int. Jour. Mod. Phys. A 37, 2250066 (2022).
- [26] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Broken Symmetries, Phys. Rev. 127, 965 (1962).
- [27] P. W. Anderson, Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, Phys. Rev. 130, 439 (1963).
- [28] G. S. Guralnik, Photon as a symmetry-breaking solution to field theory. I, Phys. Rev. 136, B1404 (1964); Photon as a symmetry-breaking solution to field theory. II, Phys. Rev. 136 B1417 (1964).
- [29] F. Englert and R. Brout, Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, Phys. Rev. Lett. 13, 321 (1964).
- [30] P. W. Higgs Broken symmetries, massless particles and gauge fields, Phys. Lett. 12 132 (1964), P. W. Higgs, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).
- [31] C. A. Bonin, G. B. de Gracia, A. A. Nogueira e B. M. Pimentel, Generalized Stueckelberg-Higgs Gauge Theory, Braz. Jour. Phys. 52, 127 (2022).
- [32] C. A. Bonin, G. B. de Gracia, A. A. Nogueira e B. M. Pimentel, Debye screening in generalized quantum electrodynamics, Int. Jour. Mod. Phys. A 35, 2050179 (2020).
- [33] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Global Conservation Laws and Massless Particles, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964).
- [34] A. Salam and J. C. Ward, Electromagnetic and Weak Interactions, Phys. Lett. 13, 2 (1964); S. Weinberg, A Model of Leptons, Phys. Ver. 19, 21 (1967).

- [35] J. L. Lopes, Lectures on weak interactions: From Fermi-Majorana-Perrin to Glashow-Weinberg-Salam and some cotributions from Latin American physicists, Mexico National University (1986); J. L. Lopes, Gauge Field Theories an Introduction (Pergamom Press, Oxford, 1981); Bassalo e Caruso, Leite Lopes, 1st. edn. (LF, São Paulo, 2014).
- [36] L. F. Alves, Teoria de Campos e simetrias no viez conceitual de Mecânica Analítica: Um breve estudo no formalismo lagrangiano e hamiltoniano, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Alfenas (2023).
- [37] F. A. Barone, A. A. Nogueira e B. M. Pimentel, O Efeito Casimir em Teoria das Fontes, Rev. Bras. Ens. Fis. 38, e3317 (2016); A. F. Ferrari, A. A. Nogueira e C. Palechor, Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico, Rev. Bras. Ens. Fís. 40, e3315 (2018).
- [38] V. F. Alves, Introdução à teoria eletrofraca, Monografia de graduação da UFRN, (2021).
- [39] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory, (Perseus Books, New York, 1995).
- [40] A. Maggiore, Modern Introduction to Quantum Field Theory, (Oxford, 2005).
- [41] Chris Quigg, Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, (Princeton University Press, Princeton, 2013).
- [42] A. Smetana, Electroweak Symmetry Breaking, (Springer, Switzerland, 2014).
- [43] J. B. Neto, Eletrodinâmica Quântica, notas de curso (IF/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988); Teoria de Campos e a Natureza-parte quântica, (Livraria da Física, São Paulo, 2017); Matemática para físicos com aplicações - Volume 1 -Vetores, tensores e spinores, Editora Livraria da Física (2023).
- [44] Ashok Das, Lectures on Quantum Field Theory, (World Scientific, Singapore, 2008); Lectures on Quantum Field Theory, WSPC (2020).
- [45] N. Nakanishi e I. Ojima, Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity, Lecture Notes in Physics (World Scientific, Singapore, 1990).
- [46] Klaus Dieter Rothe, Foundations of Quantum Field Theory, 1st edn. (World Scientific, 2020); Wolfgang Hollik, Introduction To Quantum Field Theory And The Standard Model, 1st edn. 1st edn. (World Scientific, 2022).
- [47] Brian Martin, Nuclear and Particle Physics-An Introduction, 1st edn. (Wiley, 2009); D. Griffiths, Introduction to elementary particles, 1st edn. (Wiley, 1987).

- [48] Magnar K. Bugge et al, ATLAS Masterclasses -W and Z path physics and presentation of the Z path measurement, *The European Physical Journal Conferences* 71, 00024 (2014); C. Kourkouvelis and S. Vourakis, HYPATIA—an online tool for ATLAS event visualization, *Physics Education* 49 (1), 22 (2014).